СЕКЦІЯ 7
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.86
DOI: https://doi.org/10.32782/2522-4263/2023-3-11

Вінничук І.С.
кандидат економічних наук, доцент,
асистент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Бойчук М.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Вінничук О.Ю.
кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Vinnychuk Igor
Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor,
Assistant of the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Boychuk Myroslav
Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Vinnychuk Olena
Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗВ'ЯЗКІВ МІЖ ТІНЬОВОЮ ТА ЛЕГАЛЬНОЮ ЕКОНОМІКАМИ

MODELING OPTIMAL LINKS BETWEEN THE SHADOW AND LEGAL ECONOMIES

АНОТАЦІЯ

Ця стаття присвячена моделюванню оптимальних зв'язків між тіньовою та легальною економіками з метою розуміння їх взаємодії та впливу на основні закономірності зміни заощаджень найманих робітників та власників підприємств, а також ціни агрегованого товару. Дослідження зосереджено на пошуку оптимальних стратегій керування, які дозволять зменшити масштаби тіньової економіки і покращити економічну ситуацію. У статті використано теорію оптимального керування для побудови математичної моделі взаємодії тіньової та легальної економік. Для математичної моделі враховано ряд припущень, зокрема швидкість зміни заощаджень працівників реального сектора пропорційна різниці між їх загальними доходами, складеними із легальної та тіньової зарплат, зменшених на величини податків на дохід та загальними витратами (видатки на споживання легальної та тіньової продукції); динаміка заощаджень власників залежить від різниці між їх сумарними доходами від збуту легальної та тіньової продукції, зменшеними на величини відповідних податків на дохід, та сумарними видатками на зарплату працівників, виробничі потреби та оподаткування у легальному та тіньовому секторах; швидкість зміни ціни агрегованої продукції пропорційна різниці між загальним попитом і загальною пропозицією цієї продукції на ринку. Припущення доповнено початковими умовами для динаміки руху грошових заощаджень і ціни агрегованої продукції, а також накладені обмеження на споживчі частки заощаджень, які використовуються на споживання легальної і тіньової продукції продукції для працівників та для власників підприємств. За критерій мети взято максимізацію середнього (інтегрального) сумарного забезпечення працівників і підприємців на визначеному відрізку часу. Для дослідження використано достатні умови оптимальності.

Ключові слова: тіньова економіка, легальна економіка, моделювання, теорія оптимального керування, достатні умови оптимальності.

ANNOTATION

This article is devoted to modelling the optimal links between the shadow and legal economies in order to understand their interaction and impact on the main patterns of changes in the savings of employees and business owners, and in the price of aggregate goods. The study focuses on finding optimal management strategies that will reduce the size of the shadow economy and improve the economic situation. The article uses the theory of optimal control to build a mathematical model of the interaction between the shadow and legal economies. A number of assumptions are taken into account for construction the mathematical model, in particular, firstly, the rate of change of savings of real sector employees is proportional to the difference between their total income, consisting of legal and shadow salaries, reduced by income taxes, and total expenditures (expenditures on consumption of legal and shadow products); secondly, the dynamics of owners' savings depends on the difference between their total income from the sale of legal and shadow products, reduced by the amount of relevant income taxes, and total expenditures on employee salaries, production needs and taxation in the legal and shadow sectors and thirdly, the rate of change in the price of legal and shadow products is proportional to the difference between total demand and total supply of these products on the market. The assumptions are added with initial conditions for the dynamics of cash savings and the price of the aggregate product, and restrictions are imposed on the consumer shares of savings used for consumption of legal and shadow products for employees and for business owners. The goal criterion is to maximise the average (integral) total welfare of employees and entrepreneurs over a certain period of time. Sufficient conditions of optimality were used for the study. The findings may be useful for economists, policy makers and researchers interested in the shadow economy and looking for effective ways to influence this sector. The results of the study can serve as a basis for the development of policies and recommendations aimed at reducing the shadow economy and stimulating legal economic activity.

Key words: shadow economy, legal economy, modelling, optimal control theory, sufficient conditions for optimality.

Постановка проблеми. Дослідження процесів взаємодії тіньової та легальної економік на сучасному етапі розвитку економіки є дуже важливим для розуміння економічних, податкових, соціальних та правових аспектів цих явищ. Безперечно тіньова економіка має серйозний вплив на економічну стійкість, податкові надходження, соціальний розвиток і безпеку країни. Проте, проблема ефективного регулювання і взаємодії між тіньовою та легальною економіками залишається недостатньо дослідженою. Існуючі підходи до регулювання не завжди досягають бажаних результатів і можуть мати непередбачувані наслідки. На сьогодні є залишаються актуальним дослідженням визначення факторів, які сприяють зростанню тіньового сектору та пошук шляхів детінізації економіки. Тому невирішеним залишаються питання визначення впливу тіньової економіки на окремих суб'єктів економіки, зокрема на працівників та підприємців.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження факторів, які сприяють зростанню тіньового сектору економіки та пошук шляхів детінізації є актуальними темами в економічній науці. Напрямів дослідження впливу тіньової економіки є значна кількість та всі вони є різноманітними, що породжують низку наукових напрямів в цій темі. Якщо аналізувати відомих авторів, які внесли значний вклад у дослідження тіньової економіки, то варто виділити публікації Шнайдера Ф., Фейга Е.Л., Танці В., Ульгіна Дж. та Озтуналі О. [1–4]. Зокрема, Ву Д.Ф. та Шнайдер Ф. доводить, що тіньова економіка може співіснувати із різними рівнями розвитку і вона не зникає у довгостроковій перспективі, що суперечить різноманітним трактуванням про лінійну залежність, яка передбачає тенденцію до скорочення або остаточне зникнення тіньової економіки [5]. У [6] автори проаналізувати розмір та розвиток тіньової економіки в Україні, а у [7] вплив соціально-економічних факторів на рівень тіньової економіки та індекс сприйняття корупції. Також варто зауважити, що через багатогранний характер негативного явища тіньової економіки досі немає загальної єдиної методології щодо виявлення та оцінювання масштабів тіньової економіки.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Існуючі підходи до регулювання не завжди досягають бажаних результатів і можуть мати непередбачувані наслідки. У роботі [8] побудовано комплекс математичних моделей процесів функціонування легального та тіньового секторів економіки у просторах змінних, що відображають економічну структуру суспільства. Дані моделі допускають різні розширення та модифікації, зокрема використовуючи економіко-математичну динамічну модель зміни заощаджень працівників і підприємців та ціни агрегованого товару [9] побудуємо моделі оптимального керування для визначення ефективних стратегій, які дозволять зменшити масштаби тіньової економіки і покращити економічну ситуацію.

Постановка завдання. Ця стаття пропонує побудувати математичну модель взаємодії тіньової та легальної економік з використанням теорії оптимального керування. Основні завдання статті включають: розробка математичної моделі оптимальних зв'язків між тіньовою та легальною економіками, визначення цілей та обмежень, побудова оптимальних стратегій (процесів) управління системою тіньової та легальної економіки.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для побудови моделі взаємодії між тіньової та легальної економік з використанням теорії оптимального керування формалізуємо економіко-математичну модель взаємодії між тіньовою та легальною економіками [9] як задачу оптимального керування, яка полягає у пошуку найкращого керування системою з метою досягнення заданої цілі з урахуванням обмежень. Тому опишемо ряд припущень для побудови моделі оптимального керування:

– швидкість зміни заощаджень працівників реального сектора пропорційна різниці між їх загальними доходами, складеними із легальної та тіньової зарплат, зменшених на величини податків на дохід та загальними витратами (видатки на споживання легальної та тіньової продукції):

$$\frac{d}{dt}x_1(t) \equiv \dot{x}_1(t) = p(t)\Bigg[r_L(1-k_L)+ ,$$

$$+ r_S(1-k_S) - G\left(\frac{\alpha_1 x_1(t)}{p(t)}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1(t)}{p(t)}\right)\Bigg] \quad t \in [t_0, T]; \quad (1)$$

– динаміка заощаджень власників залежить від різниці між їх сумарними доходами від збуту легальної та тіньової продукції, зменшеними на величини відповідних податків на дохід, та сумарними видатками на зарплату працівників, виробничі потреби та оподаткування у секторах L (легального) і S (тіньового):

$$\frac{d}{dt}x_2(t) \equiv \dot{x}_2(t) =$$
$$= \frac{p(t)}{\tilde{n}_2}(1-k_L)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p(t)}\right) + \frac{p(t)}{\tilde{n}_2}(1-k_S)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i(t)}{p(t)}\right) - p(t)G\left(\frac{\alpha_2 x_2(t)}{p(t)}\right) - p(t)G\left(\frac{\beta_2 x_2(t)}{p(t)}\right) -$$
$$-\frac{p(t)}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right] -$$
$$-\frac{p(t)}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_S + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right],$$
$$t \in [t_0, T]; \quad (2)$$

– швидкість зміни ціни легальної-тіньової продукції (ціни рівні) пропорц ійна різниці між загальним попитом і загальною пропозицією цієї продукції на ринку:

$$\frac{d}{dt}p(t) \equiv \dot{p}(t) =$$
$$= \nu_L\left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p(t)}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right],$$
$$t \in [t_0, T], \quad (3)$$

де x_1 – заощадження працівників реального сектора, x_2 – заощадження власників підприємств, $\tilde{n}_1$, $\tilde{n}_2$ – чисельність груп працівників реального сектора та власників підприємств, t – неперервна часова змінна, причому $t \in [t_0, T]$, $T > t_0 \geq 0$, $T > t_0$; p – ціна одиниці агрегованого продукту (визнана у секторах L та S), r_L, r_S, k_L, k_S – зарплата працівників та ставки податку на дохід у легальному та тіньовому секторах (секторах L та S), G – функція попиту представника відповідної групи (працівників чи власників) на продукцію легального та тіньового секторів, α_1 та β_1 – частки заощаджень працівників на споживання продукції легального та тіньового сектора економіки відповідно, аналогічно α_2 та β_2 – частки заощаджень власників підприємств, k_L^*, k_L^{**} – податки на фонд заробітної плати та додану вартість у легальному секторі L, k_S^* та k_S^{**} – податки на фонд тіньової заробітної плати та тіньову додану вартість, λ_L та λ_S – частки виробничих витрат на одиницю продукції у секторах L та S, δ_2 – частка заощаджень власників на виробничі потреби у легальному секторі, γ_2 – частка заощаджень власників на виробничі потреби у тіньовому секторі, ν_L – коефіцієнт інерційності ринку легальної продукції, F – виробнича функція (функція випуску продукції, тобто кількість одиниць продукції, що припадає на одного працівника за одиницю часу та відображає принципові закономірності виробництва).

Динаміку руху грошових заощаджень і ціни агрегованого продукту доповнимо початковими умовами:

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}, \ x_2(t_0) = x_2^{(0)}, \ p(t_0) = p^{(0)}. \quad (4)$$

На споживчі частки заощаджень, які використовуються на споживання легальної продукції α_1 і тіньової продукції β_1 для працівників та для власників α_2 і β_2 накладаються обмеження:

$$0 \leq \alpha_1, \ \alpha_1 + \beta_1 \leq 1,$$
$$\alpha_2 \geq 0, \ \alpha_2 \leq 1 - \delta_2 - \gamma_2 - \beta_2. \quad (5)$$

За критерій мети візьмемо максимізацію середнього (інтегрального) сумарного забезпечення працівників і підприємців на відрізку часу $[t_0, T]$

$$\int_{t_0}^{T}\left[x_1(t) + x_2(t)\right]dt \to \max_{\alpha_i, \beta_i, i=1,2}. \quad (6)$$

У математичному плані економіко-математична модель (1)–(6) є задачею оптимального керування, в якій керуваннями виступають α_1, β_1, α_2 частки грошових заощаджень, які йдуть на закупівлю агрегованих продуктів легальної та тіньової економік працівників та власників підприємств, а фазовими траєкторіями є грошові заощадження працівників x_1 та власників підприємств легальних і тіньових економік x_2, p – ціна одиниці агрегованого продукту (визнана у секторах L та S).

Проведемо дослідження моделі (1)–(6). Для дослідження використаємо достатні умови оптимальності [10, с. 155–196], за якими треба максимізувати допоміжну функцію багатьох змінних

$$R(t, x_1, x_2, p, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \varphi) \equiv \frac{\partial\varphi(t, x_1, x_2, p)}{\partial t} +$$
$$+\partial\varphi/\partial x_1\left\{p\left[r_L(1-k_L) + r_S(1-k_S) - G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)\right]\right\} +$$
$$+\partial\varphi/\partial x_2\left\{\frac{p}{\tilde{n}_2}(1-k_S)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right) + \frac{p}{\tilde{n}_2}(1-k_S)\times\right.$$
$$\times\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i}{p}\right) - pG\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right) - pG\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right) -$$
$$-\frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1-k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{p}\right)\right] -$$
$$\left.-\frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_S + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2}{\tilde{n}_1 p}\right)\right]\right\} +$$
$$+\partial\varphi/\partial p\,\nu_L\left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] -$$
$$-(x_1 + x_2) \to \max_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, x_1, x_2, p} \quad (7)$$

при обмеженнях (5), де невідома функція $\varphi(t, x_1, x_2, p)$ – неперервно-диференційована по t, x_1, x_2 та p і яку будемо шукати у вигляді

$$\varphi(t, x_1, x_2, p) = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \ell_3 p. \quad (8)$$

Сталі величини ℓ_i, $i = \overline{1.3}$ підлягають визначенню, тому підставимо (8) у (7).

Запишемо необхідні умови оптимальності функції R за змінними α_1, α_2, x_1, x_2, β_1, p, тобто $\partial R/\partial\alpha_i = 0$, $\partial R/\partial x_i = 0$, $i = 1,2$, $\partial R/\partial\beta_1 = 0$, $\partial R/\partial p = 0$. У додатку 1 визначено частинні похідні першого порядку функції R за змінними α_1, α_2, x_1, x_2, β_1, p. За необхідними умовами оптимізації отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (додаток 2).

Із другого рівняння системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (додаток 2) визначаємо допоміжну оптимізаційну величину p:

$$p = p_{доп} = \frac{\ell_1\tilde{n}_2}{\ell_2\tilde{n}_1\left(1-k_L\right)} \tag{9}$$

та оскільки ℓ_1, ℓ_2 сталі, то $p_{доп} = const$ стала величина та $\frac{dp_{gon}}{dt} = 0$.

Підставимо (9) у перше, третє, четверте, п'яте та шосте рівняння системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (додаток 2). Із першого та третього рівнянь системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (додаток 2) визначаємо сталі ℓ_1 та ℓ_3:

$$\ell_3 = -\frac{\ell_1\left(1+\ell_2\right)}{\ell_2\nu_L},\ \ \ell_2 = \frac{\left(1-k_S\right)\ell_1 - \tilde{n}_1\left(1-k_L\right)}{1+\tilde{n}_1\left(1-k_L\right)}. \tag{10}$$

Підставимо (10) у четверте, п'яте та шосте рівняння системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (додаток 2) і які складають систему із трьох рівнянь та п'ятьма невідомими x_i, α_i, $i = 1,2$ та β_1. Ступінь вільності дорівнює (5-3 =2) двом та який будемо доповнювати двома рівняннями із трьох рівнянь динамічної системи (1)-(4). Кількість комбінацій із трьох по два $C_3^2 = 3$ дорівнює трьом, тому випадків доповнення ступеня вільності є три.

Випадок А. Ступінь вільності доповнимо двома рівняннями (1)-(2) при початкових умовах (4)

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1(t) = p\Bigg[r_L\left(1-k_L\right) + r_S\left(1-k_S\right) - \\
-G\left(\frac{\alpha_1 x_1(t)}{p}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1(t)}{p}\right)\Bigg], \\
\dot{x}_2(t) = \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_L\right)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p}\right) + \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_S\right)\times \\
\times\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i(t)}{p}\right) - pG\left(\frac{\alpha_2 x_2(t)}{p}\right) - pG\left(\frac{\beta_2 x_2(t)}{p}\right) - \\
-\frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_L + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] - \\
\frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_s + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p}\right)\right], \\
t\in\left[t_0, T\right], \\
x_1\left(t_0\right) = x_1^{(0)}, \\
x_2\left(t_0\right) = x_2^{(0)}.
\end{gathered} \tag{11}$$

Випадок Б. Ступінь вільності заповнимо рівняннями (1), (3) $\left(\frac{dp}{dt} = 0\right)$ із початковою умовою (4)

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1(t) = p\Bigg[r_L\left(1-k_L\right) + r_S\left(1-k_S\right) - \\
-G\left(\frac{\alpha_1 x_1(t)}{p}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1(t)}{p}\right)\Bigg], \\
0 = \nu_L\left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p}\right)\right], \\
t\in\left[t_0, T\right], \\
x_1\left(t_0\right) = x_1^{(0)}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Випадок В. Ступінь вільності заповнимо рівняннями (2), (3) $\left(\frac{dp}{dt} = 0\right)$ із початковою умовою (4)

$$\begin{gathered}
\dot{x}_2(t) = \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_L\right)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p}\right) + \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_S\right)\times \\
\times\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i}{p}\right) - pG\left(\frac{\alpha_2 x_2(t)}{p}\right) - pG\left(\frac{\beta_2 x_2(t)}{p}\right) - \\
-\frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_L + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] - \\
-\frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_s + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p}\right)\right], \\
0 = \nu_L\left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{p}\right)\right], \\
t\in\left[t_0, T\right], \\
x_2\left(t_0\right) = x_2^{(0)}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Систему алгебраїчних рівнянь (четверте, п'яте та шосте) системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (додаток 2) та диференціальних співвідношень (11), або (12), або (13) можна розв'язати сумісним використанням методу Рунге-Кутта [11] розв'язання диференціальних рівнянь та одного із варіантів градієнтних методів розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь [12]. При цьому визначаються оптимальні керування $\alpha_1^{(ОП)}(t)$, $\alpha_2^{(ОП)}(t)$, $\beta_1^{(ОП)}(t)$, $t\in\left[t_0, T\right]$, а вибором сталої ℓ_1 домогтися виконання нерівності: $0 \le \alpha_2^{(ОП)} \le 1-\beta_2-\delta_2-\gamma_2$ та

$$\alpha_1^{(ОП)}(t) = \begin{cases} 0, \alpha_1^{(в)}(t) \le 0 \\ \dfrac{\alpha_1^{(в)}(t)}{\alpha_1^{(в)}(t)+\beta_1^{(в)}(t)}, \alpha_1^{(в)}(t) \ge 0, \beta_1^{(в)}(t) \ge 0, \end{cases}$$

$$t\in\left[t_0, T\right],$$

$$\beta_1^{(ОП)}(t) = \begin{cases} 0, \beta_1^{(ОП)}(t) \le 0 \\ \dfrac{\beta_1^{(в)}(t)}{\alpha_1^{(в)}(t)+\beta_1^{(в)}(t)}, \alpha_1^{(в)}(t) > 0, \beta_1^{(в)}(t) \ge 0, \end{cases}$$

$$t\in\left[t_0, T\right],$$

де $\alpha_1^{(в)}$ та $\beta_1^{(в)}$ – величини визначені із системи, складеної із рівнянь четвертого, п'ятого, шостого рівнянь системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (додаток 2) та (11), або (12), або (13).

За визначеними оптимальними керуваннями $\alpha_1^{(ОП)}(t)$, $\beta_1^{(ОП)}(t)$ та $\alpha_2^{(ОП)}(t)$, $t \in [t_0, T]$ відповідні оптимальні траєкторії $x_1^{(ОП)}(t)$, $x_2^{(ОП)}(t)$ та $p_{ОП}(t)$, $t \in [t_0, T]$ визначаються методом Рунге-Кутта [11] із динамічної системи (1)–(4).

Таким чином, отримали три оптимальні процеси – три оптимальні економічні режими вигляду:

$$\left\{\alpha_1^{(ОП)}(t), \beta_1^{(ОП)}(t), \alpha_2^{(ОП)}(t), x_1^{(ОП)}(t), x_2^{(ОП)}(t), p_{ОП}(t),\ t \in [t_0, T]\right\}.$$

Отже, задача оптимального керування (1)-(6) має три розв'язки – три оптимальні процеси для вибору пріоритетного процесу.

Висновки з проведеного дослідження. Формалізовано економіко-математичну модель взаємодії між тіньовою та легальною економіками як задачу оптимального керування, яка полягає у пошуку оптимальних зв'язків між тіньовою та легальною економіками з урахуванням обмежень. Запропонована модель оптимального керування має три оптимальні процеси для вибору пріоритетного процесу. Побудова оптимальних процесів допоможе врегулювати взаємодію між цими двома секторами та розробити ефективні політики, що спрямовані на зменшення тіньової економіки й покращення економічної ситуації в країні. Варто також зазначити, що конкретна формулювання цієї задачі оптимального керування взаємодії між тіньовою та легальною економіками залежить від контексту дослідження і може варіюватися в залежності від постановки завдання та припущень, що використовуються. Зокрема, вище описана методика має місце і для моделі (1), (2), (4), якщо вибрати для керування такі змінні: а) α_1 – частки заощаджень працівників на споживання продукції легального сектора, α_2 та β_2 – частки заощаджень власників підприємств на споживання продукції легального та тіньового сектора економіки та обмеженнями на керування $0 \le \alpha_1 \le 1-\beta_1$, $0 \le \alpha_2, \beta_2$, $\alpha_2 + \beta_2 \le 1-\delta_2-\gamma_2$; б) α_1, α_2 та β_2 з обмеженнями на керування $0 \le \alpha_1, \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_2 \le 1$, $0 \le \beta_2 \le 1-\delta_2-\gamma_2-\alpha_2$: в) α_1, α_2 з обмеженнями на керування $0 \le \alpha_1 \le 1-\beta_1$, $0 \le \alpha_2 \le 1-\delta_2-\gamma_2-\beta_2$; г) α_1, β_2 з обмеженнями на керування $0 \le \alpha_1 \le 1-\beta_1$, $0 \le \beta_2 \le 1-\delta_2-\gamma_2-\alpha_2$; д) β_1, α_2 з обмеженнями на керування $0 \le \beta_1 \le 1-\alpha_1$, $0 \le \alpha_2 \le 1-\delta_2-\gamma_2-\beta_2$; ж) β_2, α_2 з обмеженнями на керування $0 \le \alpha_2, \beta_2$, $\beta_2 + \alpha_2 \le 1-\delta_2-\gamma_2$ тощо. Моделювання зв'язків між тіньовою та легальною економіками є складною задачею, яка вимагає адекватних даних, врахування різних аспектів та вимагає індивідуального підходу для кожного дослідження.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Schneider F., Enste D.H. Shadow Economies: Size, Causes, and Consequences. *Journal of Economic Literature.* 2000. Vol. 38 (1). P. 77–114. URL: https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jel.38.1.77 (дата звернення: 20.05.2023).
2. Feige E. L. Defining and estimating underground and informal economies: The new institutional economics approach. *World Development*, *Elsevier*. 1990. Vol. 18(7). P. 989–1002. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0305750X90900818 (дата звернення: 20.05.2023).
3. Tanzi J.V. The underground economy in the United States: annual estimates: 1930-1980. *IMF Staff Papers.* 1983. Vol. 30. No. 2. P. 283–305. URL: https://www.elibrary.imf.org/view/journals/024/1983/002/article-A002-en.xml (дата звернення: 25.05.2023).
4. Elgin C., Oztunali O. Shadow Economies around the World: Model Based Estimates. *Working Papers*. 2012. Vol. 2012/05. URL: https://ideas.repec.org/p/bou/wpaper/2012-05.html (дата звернення: 28.05.2023).
5. Wu D.F., Schneider F. Nonlinearity between the Shadow Economy and Level of Development. *IMF Working Paper*. 2019. 29 p. URL: https://www.imf.org/en/Publications/WP/Issues/2019/03/01/Nonlinearity-Between-the-Shadow-Economy-and-Level-of-Development-46618 (дата звернення: 30.05.2023).
6. Vinnychuk I., Ziukov S. Shadow economy in Ukraine: Modelling and analysis. *Business Systems and Economics*.2013. Vol. 3 (2). P. 141–152. URL: https://ojs.mruni.eu/ojs/business-systems-and-economics/article/view/1474 (дата звернення: 25.05.2023).
7. Вінничук І.С., Вінничук О.Ю. Моделювання тіньової економічної діяльності. *Науковий вісник Чернівецького національного університету.* 2016. Вип. 773-774. Економіка. С. 171–177. URL: http://econom.chnu.edu.ua/wp-content/uploads/2016/11/visnyk-773-774.pdf (дата звернення: 06.06.2023).
8. Вінничук І.С. Моделювання процесів функціонування легального та тіньового секторів економіки : дис. ... канд. екон. наук : 08.00.11 Київ, 2015. 267 с.
9. Вінничук І.С. Модель взаємодії легальної та тіньової економік з розширеною економічною структурою суспільства. *Інноваційна економіка*. 2012. Вип. 12 (38). С. 54–58.
10. Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці. Чернівці. 2011. 200 с.
11. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. Чернівці. 2005. 396 с.
12. Григорків В.С., Ярошенко О.І. Числові методи : навч. посібник. Чернівці. 2018. 172 с.

REFERENCES:

1. Schneider F., EnsteD. H. (2000) Shadow Economies: Size, Causes, and Consequences. *Journal of Economic Literature,* vol. 38 (1), pp. 77–114. Available at: https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jel.38.1.77 (accessed May 20, 2023).
2. Feige E.L. (1990) Defining and estimating underground and informal economies: The new institutional economics approach. *World Development*, *Elsevier,* vol. 18(7), pp. 989–1002. Available at: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0305750X90900818 (accessed May 20, 2023).
3. Tanzi J.V. (1983) The underground economy in the United States: annual estimates: 1930-1980. *IMF Staff Papers,* vol. 30, no. 2, pp. 283–305. Available at: https://www.elibrary.imf.org/view/journals/024/1983/002/article-A002-en.xml (accessed May 25, 2023).

4. Elgin C., Oztunali O. (2012) Shadow Economies around the World: Model Based Estimates. *Working Papers,* vol. 2012/05. Available at: https://ideas.repec.org/p/bou/wpaper/2012-05.html (accessed May 28, 2023).
5. Wu D.F., Schneider F. (2019) Nonlinearity between the Shadow Economy and Level of Development. *IMF Working Paper*. 29 p. Available at: https://www.imf.org/en/Publications/WP/Issues/2019/03/01/Nonlinearity-Between-the-Shadow-Economy-and-Level-of-Development-46618 (accessed May 30, 2023).
6. Vinnychuk I., Ziukov S. (2013) Shadow economy in Ukraine: Modelling and analysis. *Business Systems and Economics*, vol. 3 (2), pp. 141–152. Available at: https://ojs.mruni.eu/ojs/business-systems-and-economics/article/view/1474 (accessed May 25, 2023).
7. Vinnychuk I.S., Vinnychuk O.Ju. (2016) Modeljuvannja tinjovoji ekonomichnoji dijaljnosti [Modelling shadow economic activity] *Naukovyj visnyk Chernivecjkogho nacionaljnogho universytetu,* vol. 773-774, pp. 171–177. Available at: http://econom.chnu.edu.ua/wp-content/uploads/2016/11/visnyk-773-774.pdf (accessed June 6, 2023).
8. Vinnychuk I.S. (2015) Modeljuvannja procesiv funkcionuvannja leghaljnogho ta tinjovogho sektoriv ekonomiky [Modelling the functioning of the legal and shadow sectors of the economy] (PhD Thesis), Kyiv: International Research and Training Centre for Information Technologies and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine and the Ministry of Education and Science of Ukraine.
9. Vinnychuk I.S. (2012) Modelj vzajemodiji leghaljnoji ta tinjovoji ekonomik z rozshyrenoju ekonomichnoju strukturoju suspiljstva [A model of interaction between the legal and shadow economies and the broader economic structure of society]. *Innovacijna ekonomika*, vol. 12 (38), pp. 54–58.
10. Hryhorkiv V.S. (2011) Optymaljne keruvannja v ekonomici [Optimal management in the economy]. ChernIvetskiy nats. un-t, 200 p.
11. Yasynsky V.K. (2005) Osnovy obchysljuvaljnykh metodiv [Fundamentals of computational methods]. Chernivtsi: Zoloti Lytavry, 396 p.
12. Hryhorkiv V.S., Yaroshenko O.I. (2018) Chyslovi metody: navch. Posibnyk [Numerical methods: education. manual]. Chernivtsi: ChernIvetskiy nats. un-t, 172 p.

Додаток 1. Частинні похідні першого порядку функції R за змінними α_1, α_2, x_1, x_2, β_1, p

1) $$\partial R/\partial\alpha_1 = -\frac{\ell_1 x_1}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\ell_2}{\tilde n_2}(1-k_L)\tilde n_1 x_1\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\ell_3\nu_4}{p}x_1\tilde n_1\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)}{\partial\alpha_1},$$

2) $$\partial R/\partial\beta_1 = -\frac{\ell_1 x_1}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)}{\partial\beta_1} + \frac{\ell_2}{\tilde n_2}(1-k_L)\tilde n_1 x_1\frac{\partial G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)}{\partial\beta_1},$$

3) $$\partial R/\partial\alpha_2 = (1-k_S)\ell_2 x_2\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)}{\partial\alpha_2} - \ell_2 x_2\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)}{\partial\alpha_2} + \frac{\ell_3\nu_4\tilde n_2}{p}x_2\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)}{\partial\alpha_2},$$

4) $$\partial R/\partial x_1 = -\ell_1\frac{\alpha_1}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)}{\partial x_1} - \ell_1\frac{\beta_1}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)}{\partial x_1} +$$

$$+\ell_2\frac{\tilde n_1}{\tilde n_2}(1-k_S)\alpha_1\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)}{\partial x_1} + \ell_2\frac{\tilde n_1}{\tilde n_2}(1-k_S)\beta_1\frac{\partial G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)}{\partial x_1} - 1,$$

5) $$\partial R/\partial x_2 = \ell_2\alpha_2(1-k_S)\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2} + \ell_2\beta_2(1-k_S)\frac{\partial G\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2} - \ell_2\alpha_2\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2} +$$

$$+\ell_2\beta_2\frac{\partial G\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2} - \ell_2\tilde n_2\delta_2\left(\lambda_L + k_L^{**}\right)\times\frac{\partial F\left(\frac{\tilde n_2\delta_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2} - \ell_2\left(\lambda_S + k_S^{**}\right)\gamma_2\frac{\partial F\left(\frac{\tilde n_2\gamma_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2} +$$

$$+\ell_3\nu_3\left[\frac{\tilde n_2\alpha_2}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2} - \frac{\tilde n_2\beta_2}{p}\frac{\partial F\left(\frac{\tilde n_2\delta_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2}\right] - 1,$$

6) $$\partial R/\partial p = \ell_1\left\{r_L(1-k_L) + r_S(1-k_S) - G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right) +\right.$$

$$+\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)}{\partial p}\frac{\alpha_1 x_1}{p}+\frac{\partial G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)}{\partial p}\frac{\beta_1 x_1}{p}\Bigg\}+$$

$$+\ell_2\left\{\frac{1}{\tilde n_2}(1-k_S)\sum_{i=1}^{2}\tilde n_i G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)-\frac{1}{\tilde n_2}(1-k_S)\sum_{i=1}^{2}\tilde n_i\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right)}{\partial p}\frac{\alpha_i x_i}{p}+\right.$$

$$+\frac{1}{\tilde n_2}\ell_2(1-k_S)\sum_{i=1}^{2}\tilde n_i G\left(\frac{\beta_i x_i}{p}\right)-\frac{1}{\tilde n_2}(1-k_S)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G\left(\frac{\beta_i x_i}{p}\right)}{\partial p}\frac{\beta_i x_i}{p}-$$

$$-G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)+\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}\frac{\alpha_2 x_2}{p}-G\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right)+\frac{\partial G\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}\frac{\beta_2 x_2}{p}-$$

$$-\frac{1}{\tilde n_2}\left[\tilde n_1 r_L\left(1+k_L^*\right)+\tilde n_1\left(\lambda_L+k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde n_2\delta_2 x_2}{p}\right)\right]+\tilde n_1\left(\lambda_L+k_L^{**}\right)\frac{\partial F\left(\frac{\tilde n_2\delta_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}\frac{\delta_2 x_2}{p}-$$

$$-\frac{1}{\tilde n_2}\left[\tilde n_1 r_S\left(1+k_S^*\right)+\tilde n_1\left(\lambda_S+k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde n_2\gamma_2 x_2}{p}\right)\right]+\tilde n_1\left(\lambda_S+k_S^{**}\right)\frac{\partial F\left(\frac{\tilde n_2\gamma_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}\frac{\gamma_2 x_2}{p}+$$

$$+\ell_3\nu_L\left[-\sum_{i=1}^{2}\tilde n_i\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right)}{\partial p}\frac{\alpha_i x_i}{p^2}+\tilde n_1\frac{\partial F\left(\frac{\tilde n_2\delta_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}\frac{\tilde n_2\delta_2 x_2}{p^2}\right]. \quad (9)$$

Додаток 2. Система нелінійних алгебраїчних рівнянь

1) $-\frac{\ell_1}{p}+\frac{\ell_2\tilde n_1}{\tilde n_2}(1-k_S)=0$,

2) $(1-k_S)\ell_1-\ell_2+\frac{\ell_3\nu_L\tilde n_1}{p}=0$,

3) $$\left[-\frac{\ell_1\alpha_1}{p}+\frac{\ell_2\tilde n_1}{\tilde n_2}(1-k_S)\alpha_1\right]\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)}{\partial x_1}+\left[-\frac{\ell_1\beta_1}{p}+\frac{\ell_2\tilde n_1}{\tilde n_2}(1-k_S)\beta_1\right]\frac{\partial G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)}{\partial x_1}-1=0,$$

4) $$\left[-k_S\ell_2\alpha_2+\ell_3\nu_L\frac{\tilde n_2\alpha_2}{p}\right]\frac{\partial G(\alpha_2 x_2/p)}{\partial x_2}-k_S\ell_2\beta_2\frac{\partial G(\beta_2 x_2/p)}{\partial x_2}$$

$$-\ell_2\left[\tilde n_1\delta_2\left(\lambda_S+k_S^{**}\right)+\ell_3\nu_L\frac{\tilde n_2\delta_2}{p}\right]\times$$

$$\times\frac{\partial F\left(\frac{\tilde n_2\delta_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2}-\ell_2\left(\lambda_S+k_S^{**}\right)\gamma_2\frac{\partial F\left(\frac{\tilde n_2\gamma_2 x_2}{p}\right)}{\partial x_2}-1=0,$$

5) $$\ell_1\left\{r_L(1-k_L)+r_S(1-k_S)-G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)-G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)+\frac{\alpha_1 x_1}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)}{\partial p}+\frac{\beta_1 x_1}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)}{\partial p}\right\}+$$

$$+\ell_2\left\{\frac{1}{\tilde n_2}(1-k_S)\sum_{i=1}^{2}\tilde n_i G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right)-\frac{1}{\tilde n_2}(1-k_S)\sum_{i=1}^{2}\frac{\tilde n_i\alpha_i x_i}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right)}{\partial p}+\right.$$

$$+\frac{1-k_S}{\tilde{n}_S}\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i}{p}\right)-\frac{1-k_S}{\tilde{n}_2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\beta_i x_i}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\beta_i x_i}{p}\right)}{\partial p}-G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)+\frac{\alpha_2 x_2}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}-G\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right)+$$

$$+\frac{\partial G\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}\frac{\beta_2 x_2}{p}-\frac{1}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^{*}\right)+\tilde{n}_1\left(\lambda_L+k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{p}\right)\right]+\tilde{n}_1\left(\lambda_L+k_L^{**}\right)\frac{\delta_2 x_2}{p}\frac{\partial F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}-$$

$$-\frac{1}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^{*}\right)+\tilde{n}_1\left(\lambda_S+k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2}{p}\right)+\tilde{n}_1\left(\lambda_S+k_S^{**}\right)\frac{\gamma_2 x_2}{p}\frac{\partial F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}\right\}+$$

$$+\ell_3\nu_L\left[-\sum_{i=1}^{2}\frac{\tilde{n}_i\alpha_i x_i}{p}\frac{\partial G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right)}{\partial p}+\frac{\tilde{n}_1\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{p}\frac{\partial F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{p}\right)}{\partial p}\right]=0\,.$$