СЕКЦІЯ 9 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.866:332.7
DOI: https://doi.org/10.32840/2522-4263/2021-2-42

Бойчук М.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Скращук Л.В.
кандидат економічних наук,
асистент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Григорків М.В.
доктор економічних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Boychuk Myroslav
Candidate of Physic and Mathematic Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of Economics and Mathematical Modeling Department
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Skrashchuk Larysa
Candidate of Economic Sciences,
Assistant Lecturer of Economics and Mathematical Modeling Department
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Hryhorkiv Mariia
Doctor of Economics, Associate Professor,
Associate Professor of Economic and Mathematical Modeling Department
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ МІНІМІЗАЦІЇ ТЕРМІНУ ДОСЯЖНОСТІ ЗАДАНОГО РІВНЯ УТИЛІЗАЦІЇ ЗАБРУДНЮВАЧІВ У БАГАТОКРОКОВИХ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ

STOCHASTIC MODEL OF MINIMIZING OF ACHIEVABLE TERM OF GIVEN LEVEL OF POLLUTANT UTILIZATION IN MULTI-STEP ECOLOGICAL AND ECONOMIC SYSTEMS

АНОТАЦІЯ

Дослідження спрямоване на оптимізацію процесів розподілу матеріального ресурсу в економіці на її просте та розширене відтворення, зокрема у разі еколого-економічної взаємодії, оскільки оптимальна взаємодія основного та допоміжного виробництва в еколого-економічних системах дасть змогу визначити умови оптимального зростання допоміжного виробництва, яке займається утилізацією забруднення. Розглядається економіка, у якій функціонує основне виробництво (виробництво матеріальної продукції) та допоміжне виробництво (утилізація або знищення забруднювачів). У результаті досліджень побудовано стохастичну модель мінімізації терміну досяжності заданого рівня утилізації забруднювачів у багатокрокових еколого-економічних системах за обмеження на мінімальну величину незворотності капіталовкладень із використанням вінерівських і пуассонівських процесів та проведено її дослідження за допомогою запропонованих достатніх умов оптимальності для стохастичних багатокрокових систем.

Ключові слова: стохастична модель, термін досяжності заданого рівня утилізації забруднювачів, еколого-економічна система, оптимальний процес.

АННОТАЦИЯ

Исследования направлены на оптимизацию процессов распределения материального ресурса в экономике на ее простое и расширенное воспроизводство, в частности в случае эколого-экономического взаимодействия, поскольку оптимальное взаимодействие основного и вспомогательного производств в эколого-экономических системах позволит определить условия оптимального роста вспомогательного производства, которое занимается утилизацией загрязнения. В работе рассматривается экономика, в которой работает основное производство (производство материальной продукции) и вспомогательное производство (утилизация или уничтожение загрязнителей). В результате исследований построена стохастическая модель минимизации срока достигаемости заданного уровня утилизации загрязнителей в многошаговых эколого-экономических системах при ограничении на минимальную величину необратимости капиталовложений с использованием винеровских и пуассоновских процессов и проведено ее исследование с помощью предложенных достаточных условий оптимальности для стохастических многошаговых систем.

Ключевые слова: стохастическая модель, срок досягаемости заданного уровня утилизации загрязнителей, эколого-экономическая система, оптимальный процесс.

ANNOTATION

The research is aimed at optimizing the distribution of material resources in the economy for its simple and expanded reproduction, in particular in the case of ecological and economic interaction, as the optimal interaction of main and ancillary production in ecological and economic systems will allow to determine conditions for the optimal growth of ancillary production, which deals with the disposal of pollution. The economy, in which function the main production (production of material products) and ancillary production (disposal or destruction of pollutants), is considered. As a result of researches the stochastic model of minimization of achievable term of given level of pollutant utilization in multistep ecological and economic systems at restriction on the minimum size of irreversibility of capital investments with use of Wiener and Poisson processes is constructed. This model is investigated using the proposed sufficient optimality conditions for stochastic multistep systems. The constructed model belongs to the class of ecological and economic models of achieving a given level of pollutant utilization in a minimum period of time. The algorithm is used to calculate the optimal process of the ecological and economic system. According to this algorithm it is necessary to select a multitiered mode to build the optimal process and form the appropriate left, middle and right controls; calculate according to the formed controls the corresponding averages of the left, middle and right trajectories and determine the moments of switching controls; find the final moment of the planning horizon; to construct the average optimal process as gluing together at the moments of switching the controls of the averages left with the first middle, middle with each other and the last middle with the right process; calculate stochastic left, middle and right trajectories and construct stochastic left, middle and right processes; to construct a stochastic process as gluing together at the moments of switching of stochastic controls of the left process with the first middle, middle among themselves and the last middle with the right process.

Key words: stochastic model, reach of a given level of pollutant utilization, ecological and economic system, optimal process.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Розвиток економіки суттєво залежить від структури та адекватності розподілу основного матеріального ресурсу, які, своєю чергою, залежать від рівня обґрунтованості та оптимальності відповідних рішень. У зв'язку із цим моделі оптимальної взаємодії основного та допоміжного виробництв в еколого-економічних системах дають змогу визначити умови оптимального зростання допоміжного виробництва, яке займається утилізацією забруднення. А тому дослідження оптимальних стохастичних динамічних еколого-економічних систем як у теоретичному, так і практичному плані є актуальним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спираються автори. У роботі [1, с. 49–54] запропоновано стохастичну модель оптимальної стратегії фірми з використанням вінерівських і пуассонівських процесів та проведено її дослідження за допомогою стохастичних достатніх умов оптимальності для неперервних динамічних систем.

Детермінова багатокрокова модель (багатокрокова) оптимальної стратегії поведінки фірм та її дослідження за допомогою запропонованих стохастичних достатніх умов оптимальності для багатокрокових динамічних систем розроблена у роботі [2, с. 5–18].

У роботі [3, с. 125–139] проведено стохастичне моделювання макроекономіки зростання за вінерівських і пуассонівських процесів за допомогою стохастичних достатніх умов оптимальності.

Стохастичну модель оптимального керування динамікою випуску агрегованої еколого-економічної кінцевої продукції у разі обмеження на мінімальну величину незворотності капіталовкладень розроблено у роботі [4, с. 69–85], використовуючи вінерівські й пуассонівські процеси. Проведено дослідження запропонованої моделі, використовуючи достатні умови оптимальності стохастичного типу.

У даній роботі запропоновано багатокрокову стохастичну модель мінімізації терміну досяжності заданого рівня утилізації забруднювачів в еколого-економічних системах із використанням вінерівських і пуассонівських процесів і проведено її дослідження

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Запропонувати багатокрокову стохастичну модель мінімального терміну досяжності заданого рівня утилізації забруднювачів в еколого-економічних системах і провести її дослідження за допомогою запропонованих стохастичних достатніх умов оптимальності для багатокрокових динамічних систем.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. Спершу опишемо детерміновану динамічну модель, а потім на її основі – відповідну стохастичну модель, що, власне, становить предмет цього дослідження.

Агрегована детермінована модель

Згідно з [5, с. 168–174], відповідна агрегована багатокрокова детермінована модель мінімізації терміну досяжності заданого рівня допоміжного виробництва в еколого-економічних системах має вигляд:

$$x(t)=\alpha_1 x(t)+\alpha_2 z(t)+\beta_1\left[x(t+1)-x(t)\right]+,$$

$$+\beta_2\left[z(t+1)-z(t)\right]+y(t),\quad t\in\left[0,1,2,...,T-1\right],$$

де t – дискретна часова зміна, $x(t)$ – матеріальний ресурс (продукція) основного виробництва; $z(t)$ – матеріальний ресурс допоміжного виробництва; $\alpha_1 x(t)$ – частина ресурсу, задіяна у простому відтворенні в основному виробництві $\left(\alpha_1\in[0;1]\right)$; $\alpha_2 z(t)$ – частина ресурсу, задіяна в простому відтворенні в допоміжному виробництві $\left(\alpha_2\in[0;1]\right)$; $\beta_1\left[x(t+1)-x(t)\right]$ – капітальні вкладення у розширене відтворення основного виробництва $(\beta_1>0)$; $\beta_2\left[z(t+1)-z(t)\right]$ – капітальні вкладення у розширене відтворення допоміжного виробництва $(\beta_2>0)$; $y(t)$ – кінцева продукція. Зауважимо, що $x(t+1)-x(t)$ та

$z(t+1)-z(t)$ – абсолютні прирости основного та допоміжного виробництв, а β_1 та β_2 – коефіцієнти капіталомісткості приросту матеріального ресурсу в основному та допоміжному виробництвах і показують, яку кількість ресурсу (продукції) потрібно вкласти для збільшення виробничої потужності на одиницю. Причому прирости $x(t+1)-x(t)$ та $z(t+1)-z(t)$ можуть бути лише невід'ємними, тобто $x(t+1)-x(t)\ge 0$, $z(t+1)-z(t)\ge 0$.

Формалізуємо стохастичну модель.

Агрегована стохастична модель

Нехай $\{\Omega,\Im,P\}$ – ймовірнісний простір із σ –алгеброю $\{\Im_t,\, t\in\{0,1,...,T-1\}\}\subset\sigma$, із множиною елементарних подій | та мірою (ймовірністю) P; $\xi(t)=\xi(t,\omega)\in\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел) – $\Im_t$ – вимірний стандартний вінерівський процес із нульовим математичним сподіванням приросту вінерівського процесу $M[\xi(t)-\xi(t-1)]=0$, $t\in\{0,1,...,T-1\}$, $\omega\in\Omega$ та одиничною дисперсією приросту вінерівського процесу $M[\xi(t)-\xi(t-1)]^2=1$, тобто приріст вінерівського процесу підпорядкований нормальному (гауссівському) закону розподілу ймовірностей, а для самого вінерівського процесу закон розподілу невідомий [6, с. 7–8]; $\eta(t)\equiv\eta(t,\omega)\in\mathbb{R}$ – пуассонівський процес із математичним сподіванням $M\eta(t)=\rho t$, $\rho\equiv const$, $\omega\in\Omega$, $t\in\{0,1,...,T-1\}$ [5, с. 7], причому вінерівський $\xi(t)$ і пуассонівський $\eta(t)$ процеси є незалежними.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega,\Im,P\}$ задані випадкові процеси $x(t)\equiv x(t,\omega)$ та $z(t)\equiv z(t,\omega)$, $t\in\{0,1,...,T-1\}$, $\omega\in\Omega$, які задовольняють:

– різницеву модель (модель у скінченних різницях) у формі Іто (аналог диференціальної моделі у формі Іто)

$$x(t)=\alpha_1 x(t)+\alpha_2 z(t)+\beta_1[x(t+1)-x(t)]$$
$$+\beta_2[z(t+1)-z(t)]+y(t)+\gamma_1[\xi(t)-\xi(t-1)]+$$
$$+\gamma_2[\eta(t)-\eta(t-1)],\quad t\in\{0,1,...,T-1\},$$
$$\xi(-1)=\eta(-1)=0; \tag{1}$$

– випадкові початкові та кінцеві умови

$$x(t_0)=x_0\in\Im_0,\ z(t_0)=z_0\in\Im_0,\ z(T-1)=z_T, \tag{2}$$

причому T – невідоме (шукане).

Будемо вважати, що кінцева продукція y(t) є часткою $\lambda\in(0;1)$ загального обсягу основної продукції *x(t)*:

$$y(t)=\lambda x(t).$$

Тоді багатокрокова (різницева) модель (1) набуває вигляду:

$$x(t)=[(\alpha_1+\lambda)x(t)+\alpha_2 z(t)]+\beta_1[x(t+1)-x(t)]$$
$$+\gamma_1[\xi(t)-\xi(t-1)]+\beta_2[z(t+1)-z(t)]+$$
$$+\gamma_2[\eta(t)-\eta(t-1)],\ t\in\{0,1,...,T-1\}. \tag{3}$$

За керування *u(t)* візьмемо частку вкладень в основне виробництво:

$$u(t)=\frac{\beta_1[x(t+1)-x(t)]}{\beta_1[x(t+1)-x(t)]+\beta_2[z(t+1)-z(t)]},$$
$$t\in\{0,1,...,T-1\}. \tag{4}$$

Визначивши приріст $z(t+1)-z(t)$ із (3) та (4), прирівнявши відповідні вирази, отримаємо:

$$x(t+1)-x(t)=\beta_1^{-1}u\{x(t)-[(\alpha_1+\lambda)x(t)+\alpha_2 z(t)]-$$
$$-\gamma_1[\xi(t)-\xi(t-1)]-\gamma_2[\eta(t)-\eta(t-1)]\},$$
$$x(t+1)-x(t)\ge 0. \tag{5}$$

Підставимо (5) у (4), одержимо:

$$z(t+1)-z(t)=\beta_2^{-1}(1-u)\{x(t)-[(\alpha_1+\lambda)x(t)+\alpha_2 z(t)]-$$
$$-\gamma_1[\xi(t)-\xi(t-1)]-\gamma_2[\eta(t)-\eta(t-1)]\},$$
$$t\in\{0,1,...,T-1\},$$
$$z(t+1)-z(t)\ge 0. \tag{6}$$

Співвідношення $x(t+1)-x(t)\ge 0$ і $z(t+1)-z(t)\ge 0$, $t\in\{0,1,...,T-1\}$ означають незворотність капіталовкладень на виробництво агрегованої продукції та утилізацію забруднювачів.

Накладається обмеження на мінімальну величину незворотності капіталовкладень:

$$W_1[x(t+1)-x(t)]+W_2[z(t+1)-z(t)]\ge\nu>0,$$
$$t\in\{0,1,...,T-1\}, \tag{7}$$

де W_1 і W_2 – постійні, деякі вагові коефіцієнти, ν – задана постійна. Звичайно керування з (4) є обмеженим:

$$0\le u(t)\le 1,\ \ t\in\{0,1,...,T-1\}. \tag{8}$$

Задача оптимізації полягає у тому, щоб за середній мінімальний час перевести систему зі стану (x_0,z_0) в δ-окіл $G_\delta=\{(x(t),z(t)):|x(t)-x_T|\le\delta,|z(t)-z_T|\le\delta\}$, уважаючи, що рух системи здійснюється згідно з вищенаведеними співвідношеннями (5)–(8) (час T – шуканий, x_T – шуканий кінцевий стан). Це задача стохастичної оптимальної швидкодії, математичний запис якої такий:

$$M\sum_{t=0}^{T-1}1=M(T-1)\to\min_u,$$
$$x(t+1)-x(t)=\beta_1^{-1}u(t)\{x(t)-[(\alpha_1+\lambda)x(t)+\alpha_2 z(t)]-$$
$$-\gamma_1[\xi(t)-\xi(t-1)]-\gamma_2[\eta(t)-\eta(t-1)]\},$$
$$z(t+1)-z(t)=\beta_2^{-1}[1-u(t)]\{x(t)-[(\alpha_1+\lambda)x(t)+\alpha_2 z(t)]-$$
$$-\gamma_1[\xi(t)-\xi(t-1)]-\gamma_2[\eta(t)-\eta(t-1)]\},$$
$$W_1[x(t+1)-x(t)]+W_2[z(t+1)-z(t)]\ge\nu,$$
$$0\le u(t)\le 1,\ (x(t),z(t))\in G_\delta,\ t\in\{0,1,...,T-1\},$$
$$x(0)=x_0\in\Im_{t_0},\ z(0)=z_0\in\Im_{t_0}, \tag{9}$$

де M – математичне сподівання.

Дослідження агрегованої стохастичної задачі

Проведемо дослідження агрегованої стохастичної задачі (9). Запишемо стохастичну динаміку (5)–(6) як середню динаміку руху. Для цього від лівої та правої частин (5) і (6) візьмемо математичне сподівання M та використаємо властивості вінерівського та пуассонівського процесів:

$$M\left[\xi(t+1)-\xi(t)\right]=0,$$

$$M\left[\eta(t+1)-\eta(t)\right]=\rho(t+1)-\rho(t)=\rho. \quad (10)$$

Маємо середню динаміку руху:

$$x(t+1)-x(t)=\beta_1^{-1}u(t)\left\{x(t)-\left[(\alpha_1+\lambda)x(t)+\alpha_2 z(t)\right]-\rho\gamma_2\right\},$$

$$z(t+1)-z(t)=\beta_2^{-1}\left[1-u(t)\right]\left\{x(t)-,\right.$$

$$\left.-\left[(\alpha_1+\lambda)x(t)+\alpha_2 z(t)\right]-\rho\gamma_2\right\}$$

$$t\in\{0,1,...,T-1\}. \quad (11)$$

Тоді нерівність

$$W_1\left[x(t+1)-x(t)\right]+W_2\left[z(t+1)-z(t)\right]\geq\nu$$

з урахуванням (11) набуває вигляду

$$(1-\alpha_1-\lambda)x(t)-\alpha_2 z(t)\geq\nu\left\{W_1\beta_1^{-1}u(t)+W_2\beta_2^{-1}\left[1-u(t)\right]\right\}^{-1},$$

$$t\in\{0,1,...,T-1\}. \quad (12)$$

Багатокроковій стохастичній м оделі (9) відповідає неперервна стохастична модель

$$M\int_0^{T-1}dt\to\min_u,$$

$$dx(t)=\beta_1^{-1}u(t)\left\{x(t)dt-\left[(\alpha_1+\lambda)x(t)+\alpha_2 z(t)\right]dt-\right.$$

$$\left.-\gamma_1 d\xi(t)+\gamma_2 d\eta(t)\right\}$$

$$dz(t)=\beta_2^{-1}\left[1-u(t)\right]\left\{x(t)dt-\left[(\alpha_1+\lambda)x(t)-,\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_2 z(t)\right]dt-\gamma_1 d\xi(t)-\gamma_2 d\eta(t)\right\}$$

$$\left((1-\alpha_1-\lambda)x(t)-\alpha_2 z(t)\geq\nu\left\{W_1\beta_1^{-1}u(t)+,\right.\right.$$

$$\left.\left.+W_2\beta_2^{-1}\left[1-u(t)\right]\right\}^{-1}\right)$$

$$0\leq u(t)\leq 1,\ t\in[0,T-1],\ x(0)=x_0,\ z(0)=z_0,$$

$$\left(x(T-1),z(T-1)\right)\in G_\delta,$$

для якої стохастичні неперервні достатні умови оптимальності мають вигляд [7, с. 158, 162–163, 216–219]:

– рівняння Беллмана:

$$\inf_u R(t,x,z,u,V)\equiv\inf_u\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\beta_1^{-1}u\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V}{\partial z}\beta_2^{-1}(1-u)\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]\right\}+0,5\beta_1^{-2}u^2\gamma_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+$$

$$+0,5\beta_2^{-2}(1-u)^2\gamma_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\rho\left[V\left(t,x-\beta_1^{-1}u\gamma_1,z\right)-V(t,x,z)\right]+$$

$$+\rho\left[V\left(t,x,z-\beta_2^{-1}(1-u)\gamma_2\right)-V(t,x,z)\right]+$$

$$+\chi\left\{(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z-\nu\left[W_1\beta_1^{-1}u+W_2\beta_2^{-1}(1-u)\right]^{-1}\right\}+1\}=0,$$

$$t\in[t_0,T]; \quad (13)$$

– крайова умова:

$$V\left(T-1,x(T-1),z_T\right)=0,$$

де V – шукана досить гладка функція по t та x і z.

Згідно з результатами [8, с. 117–119], неперервний вираз

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\beta_1^{-1}u\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial z}\beta_2^{-1}(1-u)\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]$$

замінимо різницевим (дискретним) виразом

$$V\left(t+1,x(t)+\psi_1(t),z(t)+\psi_2(t)\right)-V\left(t,x(t),z(t)\right),$$

$$\psi_1(t)=\beta_1^{-1}u\left[(1-\alpha_1-\lambda)x(t)-\alpha_2 z(t)\right]),$$

$$\psi_2(t)=(1-u)\left[(1-\alpha_1-\lambda)x(t)-\alpha_2 z(t)\right])$$

та використаємо представлення

$$V(t,x,z)=lx(t)+z(t)-lx_T-z_T \quad (14)$$

(l – постійна, яка підлягає визначенню).

Із (13) отримаємо стохастичну достатню умову оптимальності для багатокрокової стохастичної моделі (9) (рівняння Беллмана):

$$R^*\equiv\inf_u R^*(x,z,u,l)\equiv\inf_u\left\{l\beta_1^{-1}u\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]-\right.$$

$$-\left[(1-\alpha_1-\lambda)x(T-1)-\alpha_2 z(T-1)\right]\left\{l\beta_1^{-1}u(T-1)+\right.$$

$$\left.+\beta_2^{-1}\left[1-u(T-1)\right]\right\}+$$

$$+\beta_2^{-1}(1-u)\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]-\rho l\beta_1^{-1}u\gamma_1-\rho\beta_2^{-1}(1-u)\gamma_2+$$

$$+\rho\left\{l\beta_1^{-1}u(T-1)\gamma_1+\beta_2^{-1}\left[1-u(T-1)\right]\gamma_2\right\}+$$

$$+\chi\left\{(1-\alpha_1-\lambda)x_1-\alpha_2 z-\nu\left[W_1\beta_1^{-1}u+\right.\right.$$

$$\left.\left.+W_2\beta_2^{-1}(1-u)\right]\right\}^{-1}+1\}=0. \quad (15)$$

Запишемо необхідну умову оптимальності функції R^* по χ – рівність нулеві частинної похідної першого порядку

$$\frac{\partial R^*}{\partial\chi}=(1-\alpha_1-\lambda)x(t)-\alpha_2 z(t)-$$

$$-\nu\left\{W_1\beta_1^{-1}u(t)+W_2\beta_2^{-1}\left[1-u(t)\right]\right\}^{-1}\equiv$$

$$\equiv Q_1(t,x,z,u)=0,\ t\in\{0,1,...,T-1\}. \quad (16)$$

Функція R^* лінійна по u, а тому найменшого значення R^* по u отримуємо за

$$u^*=\begin{cases}u_{кр}^{(1)}=0,\ l\beta_1^{-1}\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]-\beta_2^{-1}\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]-\\ \quad-\rho l\beta_1^{-1}\gamma_1+\rho\beta_2^{-1}\gamma_2>0,\\ u_{кр}^{(2)}=1,\ l\beta_1^{-1}\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]-\beta_2^{-1}\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]-\\ \quad-\rho l\beta_1^{-1}\gamma_1+\rho\beta_2^{-1}\gamma_2<0,\\ довільне\ із\ [0,1]\\ \left(l\beta_1^{-1}-\beta_2^{-1}\right)\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]-\rho\left(l\beta_1^{-1}\gamma_1-\beta_2^{-1}\gamma_2\right)=0.\end{cases} \quad (17)$$

Розглянемо випадок $\left(l\beta_1^{-1}-\beta_2^{-1}\right)\left[(1-\alpha_1-\lambda)x-\alpha_2 z\right]-\rho\left(l\beta_1^{-1}\gamma_1-\beta_2^{-1}\gamma_2\right)=0$, що характеризує необхідну умову оптимальності R^* по u, звідки маємо

$$\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x-\alpha_2 z=\frac{\rho\left(l\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1\right)}{l\beta_2-\beta_1}. \qquad (18)$$

З урахуванням (16) рівняння Беллмана (15) має вигляд:

$$\left[\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x(t)-\alpha_2 z(t)\right]-\rho\gamma_2-$$
$$-\left[\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x(T-1)-\alpha_2 z(T-1)\right]\times$$
$$\times\left\{l\beta_1^{-1}u(T-1)-\beta_2^{-1}\left[1-u(T-1)\right]\right\}\beta_2+$$
$$+\beta_2\left\{\left[l\beta_1^{-1}u(T-1)\gamma_1+\beta_2^{-1}\left[1-u(T-1)\right]\right]\right\}=0. \qquad (19)$$

Із (18) знаходимо

$$z(t)=\alpha_2^{-1}\left[\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x(t)-\frac{\rho\left(l\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1\right)}{l\beta_2-\beta_1}\right]$$

та підставимо в середню динаміку руху (11), отримаємо:

$$x(t+1)-x(t)=\beta_1^{-1}u\left[\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x(t)-\alpha_2 z(t)-\rho\gamma_2\right],$$
$$\alpha_2^{-1}\left(1-\alpha_1-\lambda\right)\left[x(t+1)-x(t)\right]=$$
$$=\beta_2^{-1}(1-u)\left[\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x(t)-\alpha_2 z(t)-\rho\gamma_2\right].$$

Поділивши ліві та праві частини цієї системи, одержимо

$$\alpha_2^{-1}\left(1-\alpha_1-\lambda\right)=\frac{\beta_2^{-1}(1-u)}{\beta_1^{-1}u},$$

звідки маємо керування

$$u^*=\frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_2\left(1-\alpha_1-\lambda\right)+\beta_1\alpha_2}. \qquad (20)$$

Слід зауважити, що крайові керування із (17) та часткове керування із (20) є детермінованими величинами.

Але керування u^* повинно належати відрізку $[0,1]$. А тому часткове керування набуває вигляду

$$u_{час}=\begin{cases}0, \ u^*\le 0,\\ 1, \ u^*\ge 1,\\ u^*, \ u^*\in(0,1).\end{cases} \qquad (21)$$

Співвідношення (17) з урахуванням (21) мають вигляд:

$$u^*=\begin{cases}u_{кр}^{(1)}=1, \ \left(l\beta_1^{-1}-\beta_2^{-1}\right)\left[\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x-\alpha_2 z\right]-\rho\left(l\beta_1^{-1}\gamma_1+\beta_2^{-1}\gamma_2\right)>0,\\ u_{кр}^{(2)}=0, \ \left(l\beta_1^{-1}-\beta_2^{-1}\right)\left[\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x-\alpha_2 z\right]-\rho\left(l\beta_1^{-1}\gamma_1+\beta_2^{-1}\gamma_2\right)<0,\\ u_{час}, \ \left(l\beta_1^{-1}-\beta_2^{-1}\right)\left[\left(1-\alpha_1-\lambda\right)x-\alpha_2 z\right]-\rho\left(l\beta_1^{-1}\gamma_1+\beta_2^{-1}\gamma_2\right)=0.\end{cases} \qquad (22)$$

Таким чином, багатокрокова стохастична модель (9) має три оптимальні керування – три одноярусні еколого-економічні режими:

1) $u^*=1$ – режим повного відносного еколого-економічного нагромадження;

2) $u^*=0$ – режим відсутності відносного еколого-економічного нагромадження;

3) $u^*=u_{час}$ – режим часткового відносного еколого-економічного нагромадження.

Із цих знайдених одноярусних режимів можна формувати багатоярусні режими $(q\ge 2)$:

1) двоярусні $(q=2)$, наприклад «повний + відсутній», «частковий+повний» та ін.;

2) триярусні $(q=3)$, наприклад «повний + частковий + відсутній», «відсутній + частковий+повний» та ін.;

3) багатоярусні $(q\ge 4)$: чотириярусний «повний+частковий+відсутній+частковий», наприклад п'ятиярусний «повний+частковий+відсутній+частковий+повний» та ін. Багатоярусні режими призначені для побудови оптимальних процесів і вибору серед них пріоритетного, а відповідно пріоритетного багатоярусного оптимального процесу.

Виберемо триярусний режим $(q=3)$ «повний + частковий + відсутній» та для нього побудуємо оптимальний процес, а для інших багатоярусних режимів $(q\ge 2)$ побудова проводиться аналогічно.

Для вибраного триярусного режиму «повний + частковий + відсутній» за лівий режим візьмемо «повний», якому відповідає ліве керування $u_{лів}=u^*=1$, а відповідний процес назвемо лівим процесом, серединний процес буде відповідати режиму «частковий» із серединним керуванням $u_{серед}=u_{час}$, а правий процес відповідатиме режиму «відсутній» та якому відповідає праве керування $u_{пр}=u^*=0$.

Спершу побудуємо середній лівий, серединний і правий процеси.

Середній лівий процес. Лівий процес складається з лівого керування $u_{лів}=u^*=1$ та відповідних середніх лівих траєкторій $x_{лів}^{(c)}$ і $z_{лів}^{(c)}$ та які є розв'язками середньої динаміки руху (11) за середніх початкових умов $x(t_0)=Mx_0$ і $z(t_0)=Mz_0$. За визначеними серединним керуванням $u_{серед}=u_{час}$ та відповідними середніми лівими траєкторіями $x_{лів}^{(c)}$ і $z_{лів}^{(c)}$ із сумарного рівняння (16) визначаємо перший момент перемикання ς_1. Алгоритм такий: проводиться перевірка виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^{n^*}Q_1\left(t,x_{лів}^{(c)}(t),z_{лів}^{(c)}(t),u_{серед}\right)\ge 0 \ \text{(або <0)}$$

$$\sum_{i=1}^{n^*}Q_1\left(t+1,x_{ілів}^{(c)}(t+1),z_{серед}(t+1)\right)<0 \ \text{(або } \ge 0\text{)}, \qquad (23)$$

за виконання яких за момент ς_1 потрібно взяти значення t або $(t+1)$, де $n^*=n$ при $m'' n$, $n^*=m$ при $m>n$; при $m'' n$ векторами є $x_0'=(x_{10},...,x_{n0})$, $\rho'=(\rho_1,...,\rho_n)$, $z_0'=(z_{10},...,z_{m0},0,...,0)$, $\nu'=(\nu_1,...,\nu_n)$; при $m>n$ векторами є $x_0'=(x_{10},...,x_{n0},0,...,0)$, $\rho'=(\rho_1,...,\rho_n,0,...,0)$, $z_0'=(z_{10},...,z_{m0})$, $\nu'=(\nu_1,...,\nu_n,0,...,0)$.

Отримали середній лівий процес

$$\left\{x_{лів}^{(c)}(t),z_{лів}^{(c)}(t),u_{лів}=1, \ t\in\left[0,1,...,\zeta_1-1\right]\right\}.$$

Еколого-економічна система рухається по лівих траєкторіях $x_{лів}^{(c)}(t)$ і $z_{лів}^{(c)}(t)$ до моменту ζ_1.

У момент ζ_1 сходить із лівого процесу та рухається по середніх серединних траєкторіях

$x_{серед}^{(c)}$ і $z_{серед}^{(c)}$ за серединного керування $u_{серед} = u_{час}$ (режим «частковий») та є розв'язками середньої динаміки руху (11) при $u = u_{серед}$ та $x_{серед}(\zeta_1) = x_{лів}(\zeta_1)$, $z_{серед}(\zeta_1) = z_{лів}(\zeta_1)$. За знайденими $x_{серед}^{(c)}$, $z_{серед}^{(c)}$ та $u_{пр} = 0$ із сумарного рівняння (16) визначаємо другий момент перемикання керування ς_2 за алгоритмом – перевірка виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^{n^*} Q_1\left(t, x_{iсеред}^{(c)}(t), z_{iсеред}^{(c)}(t), u_{пр}\right) \geq 0 \text{ (або <0)},$$

$$\sum_{i=1}^{n^*} Q_1\left(t+1, x_{iсеред}^{(c)}(t+1), z_{iсеред}^{(c)}(t+1), u_{пр}\right) < 0$$

$$\text{(або } \geq 0\text{)}, \ t \in \{\zeta_1, ..., T-1\}, \quad (24)$$

за виконання яких $\varsigma_2 = t$ (або $t+1$), де $n^* = n$ при $m'' n$, $n^* = m$ при $m > n$; при $m'' n$ векторами є $\left(x_{серед}^{(c)}\right)' = \left(x_{1серед}^{(c)}, ..., x_{nсеред}^{(c)}\right)$, $\left(z_{серед}^{(c)}\right)' = \left(z_{1серед}^{(c)}, ..., z_{mсеред}^{(c)}, 0, ..., 0\right)$, а при $m > n$ векторами є $\left(x_{серед}^{(c)}\right)' = \left(x_{1серед}^{(c)}, ..., x_{nсеред}^{(c)}, 0, ..., 0\right)$, $\left(z_{серед}^{(c)}\right)' = \left(z_{1серед}^{(c)}, ..., z_{mсеред}^{(c)}\right)$.

Якщо $\varsigma_2 \leq \varsigma_1$, то середнім оптимальним процесом $\left\{x_{ОП}^{(c)}(t), z_{оп}^{(c)}(t), u(t), \ t \in \{0,1,...,\varsigma_2\}\right\}$ є середній лівий процес $\left\{x_{ОП}^{(c)}(t) = x_{лів}^{(c)}(t), z_{ОП}^{(c)}(t) = z_{лів}^{(c)}(t), u_{ОП}(t) = u_{лів} = 1, \ t \in \{0,1,...,T-1\}\right\}$.

Нехай $\varsigma_2 > \varsigma_1$. Маємо середній серединний процес

$$\left\{x_{серед}^{(c)}(t), z_{серед}^{(c)}(t), u_{серед} = u_{час}, \ t \in \{\varsigma_1, \varsigma_1+1, ..., \varsigma_2-1\}\right\}.$$

Середній правий процес. Еколого-економічна система рухається по траєкторіях серединного процесу до моменту ς_2, а в момент ς_2 сходить із серединного процесу та рухається по середніх правих траєкторіях $x_{ПР}^{(c)}$ і $z_{ПР}$ при правому керуванні $u_{пр} = 0$, які є розв'язками середніх динамік руху (11) при початкових умовах $x(\varsigma_2) = x_{серед}^{(c)}(\varsigma_2)$, $z(\varsigma_2) = z_{серед}^{(c)}(\varsigma_2)$, $u = u_{ПР}$.

У подальшому еколого-економічна система рухається по траєкторії правого процесу $\left\{x_{ПР}^{(c)}(t), z_{ПР}^{(c)}(t), u_{ПР} = 0, \ t \in \{\varsigma_2, \varsigma_2+1, ..., T-1\}\right\}$ до моменту горизонту планування Т, який визначається із сумарного рівняння

$$Q_2\left(T-1, z_{ПР}^{(c)}(T-1)\right) = z_{ПР}^{(c)}(T-1) - z_T = 0, \quad (25)$$

за алгоритмом – перевірка виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^{n^*} Q_2\left(t, z_{iПР}^{(c)}(t)\right) \geq 0 \text{ (або <0)}$$

$$\sum_{i=1}^{n^*} Q_2\left(t+1, z_{iПР}^{(c)}(t+1)\right) < 0 \text{ (або } \geq 0\text{)},$$

$$t \in \{\zeta_2, ..., T-1\} \quad (26)$$

за виконання яких момент $T-1 = t$, де $n^* = n$ при $m'' n$, $n^* = m$ при $m > n$; при $m'' n$ векторам є $\left(z_{ПР}^{(c)}\right)' = \left(z_{1ПР}^{(c)}, ..., z_{mПР}^{(c)}, 0, ..., 0\right)$, а при $m > n$ – $\left(z_{ПР}^{(c)}\right)' = \left(z_{1ПР}^{(c)}, ..., z_{mПР}^{(c)}\right)$. Маємо середній правий процес $\left\{x_{ПР}^{(c)}(t), z_{ПР}^{(c)}(t), u_{ПР} = 0, \ t \in \{\varsigma_2, \varsigma_2+1, ..., T-1\}\right\}$.

Зауважимо, що момент T є детермінованою величиною.

Таким чином, середнім оптимальним процесом

$$\left\{x_{ОП}^{(c)}(t), z_{ОП}^{(c)}(t), u_{ОП}, \ t \in \{0,1,...,T-1\}\right\}$$

для вибраного триярусного режиму «повний + частковий + відсутній» є склейки в моментах перемикання керувань у момент ς_1 середнього лівого процесу

$$\left\{x_{ОП}^{(c)}(t) = x_{лів}^{(c)}(t), z_{ОП}^{(c)}(t) = z_{лів}^{(c)}(t), u_{ОП}(t) = u_{лів} = 1, \ t \in \{0,1,...,\varsigma_1-1\}\right\}$$

із середнім серединним процесом

$$\left\{x_{ОП}^{(c)}(t) = x_{серед}^{(c)}(t), z_{ОП}^{(c)}(t) = z_{серед}^{(c)}(t), u_{ОП}(t) = u_{серед} = u_{час}, \ t \in \{\varsigma_1, ..., \varsigma_2-1\}\right\}$$

та в момент ς_2 середнього серединного процесу із середнім правим процесом

$$\left\{x_{ОП}^{(c)}(t) = x_{ПР}^{(c)}(t), z_{ОП}^{(c)}(t) = z_{ПР}^{(c)}(t), u_{ОП} = u_{ПР} = 0, \ t \in \{\varsigma_2, ..., T-1\}\right\}.$$

А стохастичним оптимальним процесом $\left\{x_{ОП}(t), z_{ОП}(t), u_{ОП}(t), \ t \in \{0,1,...,T-1\}\right\}$ є

$$x_{ОП}(t) = \begin{cases} x_{лів}(t), \ t \in \{0,1,...,\xi_1\}, \\ x_{серед}(t), \ t \in \{0,1,...,\xi_2\}, \\ x_{ПР}(t), \ t \in \{\xi_2, ..., T-1\}, \end{cases}$$

$$u_{ОП}(t) = \begin{cases} u_{лів}, \ t \in \{0,1,...,\xi_1-1\}, \\ u_{серед}, \ t \in \{0,1,...,\xi_2-1\}, \\ u_{ПР}, \ t \in \{\xi_2, ..., T-1\}, \end{cases}$$

$$z_{ОП}(t) = \begin{cases} z_{лів}(t), \ t \in \{0,1,...,\xi_1\}, \\ z_{серед}(t), \ t \in \{0,1,...,\xi_2\}, \\ z_{ПР}(t), \ t \in \{\xi_2, ..., T-1\}, \end{cases}$$

де стохастичні ліві траєкторії $x_{лів}(t)$ та $z_{лів}(t)$, серединні $x_{серед}(t)$ та $z_{серед}(t)$ і праві $x_{пр}(t)$ та $z_{пр}(t)$ є розв'язками таких задач:

– ліві $x_{лів}$ та $z_{лів}$ – задачі (5)–(6), (2) при $u = u_{лів}$ на $\{0,1,...,\xi_1-1\}$;

– серединні $x_{серед}$ та $z_{серед}$ – задачі (5)–(6), $x(\xi_1) = x_{лів}(\xi_1)$, $z(\xi_1) = z_{лів}(\xi_1)$ при $u = u_{серед}$ на $\{\xi_1, ..., \xi_2-1\}$;

– праві $x_{ПР}$ та $z_{ПР}$ – задачі (5)–(6), при $x(\xi_2) = x_{серед}(\xi_2)$, $z(\xi_2) = z_{серд}(\xi_2)$, $u = u_{ПР}$ на $\{\xi_2, ..., T-1\}$.

Можна для різних багатоярусних режимів $(q \geq 2)$, будувати оптимальні процеси, і серед них є можливість вибирати пріоритетний оптимальний процес.

Алгоритм розрахунку оптимального процесу еколого-економічної системи

1. Вибрати багатоярусний режим $(q \geq 2)$ для побудови оптимального процесу та сформувати відповідні ліве, серединні та праве керування.

2. Розрахувати за сформованими керуваннями відповідні середні ліву, серединні та праву траєкторії та визначити моменти перемикання керувань.

3. Знайти кінцевий момент горизонту планування $(T-1)$.

4. Побудувати середній оптимальний процес як склейку в моментах перемикання керувань середніх лівого із першим серединним, середині між собою та послідній серединний із правим процесом.

5. Обчислити стохастичні ліву, серединні та праву траєкторії та побудувати стохастичний лівий, серединні та правий процеси.

6. Побудувати стохастичний процес як склейки в моментах перемикання керувань стохастичних лівого процесу із першим серединним, серединні між собою та послідній серединний із правим процесом. Вихід з алгоритму.

За стохастичного моделювання необхідно знати довірчі проміжки реальних значень оптимальних траєкторій за заданою ймовірністю (заданим довірчим рівнем).

Нехай проведено обчислювальний експеримент із визначення оптимальних траєкторій та знайдено N ансамблів $x_{ОП}^{(j)}(t)$ та $z_{ОП}^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,N}$, $t \in \{0,1,...,T-1\}$.

Обчислимо вибіркові статистики [9, с. 213; 10] нормальної генеральної сукупності $x_{ОП}^{(j)}(t)$, $z_{ОП}^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,N}$, $t \in \{0,1,...,T-1\}$:

– вибіркові середні

$$\overline{x}_{ОП}(t) = N^{-1}\sum_{j=1}^{N} x_{ОП}^{(j)}(t),$$

$$\overline{z}_{ОП}(t) = N^{-1}\sum_{j=1}^{N} z_{ОП}^{(j)}(t),$$

$$t \in \{0,1,...,T-1\};$$

– вибіркові дисперсії

$$S_{x_{ОП}}^2(t) = (N-1)^{-1}\sum_{j=1}^{N}\left(x_{ОП}^{(j)}(t) - \overline{x}_{ОП}(t)\right)^2,$$

$$S_{z_{ОП}}^2(t) = (N-1)^{-1}\sum_{j=1}^{N}\left(z_{ОП}^{(j)}(t) - \overline{z}_{ОП}(t)\right)^2,$$

$$t \in \{0,1,...,T-1\}.$$

Зауважимо, що вибіркова середня оптимальних траєкторій $\overline{x}_{ОП}(t)$ та $\overline{z}_{ОП}(t)$ відповідно збігаються (рівні) із середніми оптимальними траєкторіями $x_{ОП}^{(c)}(t)$ та $z_{ОП}^{(c)}(t)$, $t \in \{0,1,...,T-1\}$ вище визначеними. Довірчими проміжками для дисперсій нормальних генеральних сукупностей оптимальних траєкторій за заданою ймовірністю (довірчим рівнем) $Q \in (0,1)$ є

($\dfrac{(N-1)S_{x_{ОП}}^2(t)}{\chi_{1-Q}^2(N-1)}$ – нижня межа;

$\dfrac{(N-1)S_{x_{ОП}}^2(t)}{\chi_{Q}^2(N-1)}$ – верхня межа),

($\dfrac{(N-1)S_{z_{ОП}}^2(t)}{\chi_{1-Q}^2(N-1)}$ – нижня межа;

$\dfrac{(N-1)S_{z_{ОП}}^2(t)}{\chi_{Q}^2(N-1)}$ – верхня межа),

$t \in \{0,1,...,T-1\}$,

де $\chi_{1-Q}^2(N-1)$ та $\chi_{Q}^2(N-1)-(1-Q)$ та Q – квантилі закону Пірсона (χ^2-хі квадрат) із $(N-1)$ ступенями вільності та довірчим рівнем (ймовірністю) відповідно $(1-Q)$ і Q [9, таблиця, с. 238–239].

Тоді довірчими проміжками для реальних значень оптимальних траєкторій за заданою ймовірністю (заданим довірчим рівнем) $Q \in (0,1)$ є

($\overline{x}_{ОП}(t) - \dfrac{S_{x_{ОП}}(t)t_Q}{\sqrt{N}}$ – нижня межа;

$\overline{x}_{ОП}(t) + \dfrac{S_{x_{ОП}}(t)t_Q}{\sqrt{N}}$ – верхня межа),

($\overline{z}_{ОП}(t) - \dfrac{S_{z_{ОП}}(t)t_Q}{\sqrt{N}}$ – нижня межа;

$\overline{z}_{ОП}(t) + \dfrac{S_{z_{ОП}}(t)t_Q}{\sqrt{N}}$ – верхня межа)

$t \in \{0,1,...,T-1\}$, де t_Q – Q-квантиль двостороннього закону розподілу Ст'юдента із $(N-1)$ –ступенями вільності при довірчому рівні Q [9, таблиця, с. 236–237]. Таким чином, визначено довірчі проміжки для реальних значень оптимальних траєкторій за заданою ймовірністю.

Зауваження. Вище описана методика дослідження багатокрокових стохастичних еколого-економічних систем має місце під час розгляду стохастичної моделі (9) за обмеження на керування $0 < u_1 \leq u(t) \leq u_2 < 1$, $t \in \{0,1,...\}$.

Висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Запропоновано багатокрокову стохастичну модель терміну досяжності заданого рівня утилізації забруднювачів в еколого-економічних системах із використанням вінерівських і пуассонівських процесів та проведено її дослідження за допомогою запропонованих стохастичних достатніх умов оптимальності для багатокрокових динамічних систем.

Для запропонованої багатокрокової стохастичної моделі проведено опис оптимального процесу та встановлено, що момент перемикання керування та термін досяжності заданого рівня утилізації забруднювачів є детермінованою величиною; установлено, що модель має три оптимальні еколого-економічні режими; визначено довірчі проміжки для реальних значень оптимальних траєкторій за заданою ймовірністю.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Бойчук М.В., Ярошенко О.І. Стохастичне моделювання оптимальної кредитної стратегії компанії-дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Економіка.* 2015. Вип. 11. С. 49–54.
2. Бойчук М.В., Ярошенко О.І. Багатокрокова модель оптимальної стратегії компанії-дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції. *Моделювання та інформаційні системи в економіці.* 2018. № 95. С. 5–18.
3. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Стохастичная модель полного цикла оптимальной эколого-экономической динамики. *Проблемы управления и інформатики.* 2013. № 2. С. 125–139.
4. Бойчук М.В., Скращук Л.В. Стохастична модель оптимального керування динамікою випуску агрегованої еколого-економічної продукції при обмеженні на мінімальну величину незворотності капіталовкладень. *Збірник наукових праць Буковинського університету. Економічні науки.* 2019. Вип. 15. С. 69–85.
5. Скращук Л.В., Григорків В.С. Моделювання процесів функціонування основного та допоміжного виробництв в еколого-економічних системах. *Науковий вісник Чернівецького університету. Економіка.* 2015. Вип. 730–731. С. 168–174.
6. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Київ : Либідь, 1990. 168 с.
7. Андреева Е.А., Колмановский Е.Б., Шайхат Л.Е. Управление системами с последствием. Москва : Наука, 1992. 336 с.
8. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов и др. Москва : Высшая школа, 1990. 430 с.
9. Магнус Я.Р. Эконометрика : учебное пособие ; 2-ее изд., испр. Москва : Дело, 1998. 248 с.
10. Григорків В.С. Економетрика: лінійні моделі парної та множинної регресії : навчальний посібник. Чернівці : ЧНУ, 2009. 224 с.

REFERENCES:

1. Boychuk M.V. (2015) Stokhasticheskoye modelirovaniye optimalnoy kreditnoy strategii kompanii – distrib'yura na rynke farmatsevticheskoy produktsii / M.V. Boychuk, A.I. Yaroshenko. *Vestnik Kiyevskogo natsional'nogo universiteta im. Tarasa Shevchenko. Ekonomika,* vol. 11, pp. 49–54.
2. Boychuk M.V. (2018) Mnogoshagovaya model' optimal'noy strategii kompanii-distrib'yutora na rynke farmatsevticheskoy produktsii / M.V. Boychuk, A.I. Yaroshenko. *Modelirovaniye i informatsionnyye sistemy v ekonomike:* sb. Nauk. Trudov / otv. Red. V.K. Galitsyn. No. 95, pp. 5–18.
3. Boychuk M.V. (2013) Stokhasticheskaya model' polnogo tsikla optimal'noy ekologo-ekonomicheskoy dinamiki / M.V. Boychuk, A.R. Semchuk. *Problemy upravleniya i informatiki,* no. 2, pp. 125–139.
4. Boychuk M.V. (2019) Stokhasticheskaya model' optimalnogo upravleniya dinamikoy vypuska agregirovannoy ekologo-ekonomicheskoy produktsii pri ogranichenii na minimal'nuyu velichinu neobratimosti kapitalovlozheniy / M.V. Boychuk, L.V. Skrashchuk. *Sbornik nauchnykh trudov Bukovinskogo universiteta,* vol. 15. Ekonomicheskiye nauki. Pp. 69–85.
5. Skrashchuk L.V. (2015) Modelirovaniye protsessov funktsionirovaniya osnovnogo i vspomogatel'nogo proizvodstv v ekologo-ekonomicheskikh sistemakh / V. S. Grigorkiv, L. V. Skrashchuk. *Nauchnyy vestnik Chernovitskogo universiteta: Sbornik nauk. Trudov.* Vyp. 730-731. Ekonomika. Chernovtsy: CHNU, Pp. 168–174.
6. Skorokhod A.V. (1990) Lektsii po teorii sluchaynykh protsessov / A.V. Skorokhod. Moscow: Prosveshcheniye, 168 p.
7. Andreyeva Ye.A. (1992) Upravleniye sistemami s posledstviyem / Ye.A. Andreyeva, Ye.B. Kolmanovskiy, L.Ye. Shaykhat. Moscow: Nauka, 336 p.
8. Krotov V.F. (1990) Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya / V.F. Krotov, B.A. Lagosha, S.M. Lobanov i dr. Moscow: Vysshaya shkola, 430 p.
9. Magnus Ya.R. (1998) Ekonometrika. UCHEBNYY kurs. Uchebnoye posobiye. 2e izd., Ispr. Moscow: Delo, 248 p.
10. Grigorkiv V.S. (2009) Ekonometrika: Lineynyye modeli parnoy i mnozhestvennoy regressii: uchebnoye posobiye. Chernovtsy: CHNU, 224 p.