СЕКЦІЯ 10
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.101:519.866
DOI: https://doi.org/10.32840/2522-4263/2020-3-46

Бойчук М.В.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Маханець Л.Л.
кандидат економічних наук,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Boychuk Myroslav
Candidate of Physic and Mathematic Sciences,
Associate Professor of Economics and Mathematical Modeling Department
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Makhanets Liubov
Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor of Economics and Mathematical Modeling Department
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ СТАТИЧНОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА З ІНВЕСТИЦІЙНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

STOCHASTIC SIMULATION OF THE OPTIMAL STATIC GENERALIZED LEONTIEV MODEL WITH INVESTMENT DELAY

АНОТАЦІЯ

У роботі запропонована стохастична статична узагальнена модель Леонтьєва з використанням вінерівських та пуассонівських процесів за інвестиційного запізнення та проведено її дослідження. Для запропонованої стохастичної моделі проведено опис оптимального процесу та приведені розрахункові формули обчислення довірчих інтервалів для оптимальних траєкторій за капіталами галузей за заданого довірчого рівня. Встановлено, що в запропонованій стохастичній моделі оптимальні керування за рівнем діяльності, за робочою силою, за валовими інвестиціями, за споживанням, за кінцевим випуском продукції не залежать від коефіцієнтів при приростах вінерівських процесів в динаміках капіталів галузей та носять детермінований характер, а оптимальні траєкторії за капіталами галузей – стохастичний характер.

Ключові слова: стохастична модель, статична узагальнена модель Леонтьєва, інвестиційне запізнення, оптимальне керування, оптимальна траєкторія, оптимальний процес.

АННОТАЦИЯ

В работе предложена стохастическая статическая обобщенная модель Леонтьева с использованием винеровских и пуассоновских процессов при инвестиционном опоздании и проведено ее исследование. Для предложенной стохастической модели проведено описание оптимального процесса и приведены расчетные формулы вычисления доверительных интервалов для оптимальных траекторий за капиталами отраслей при заданном доверительном уровне. Установлено, что в предложенной стохастической модели оптимальные управления уровнем деятельности по рабочей силе, по валовым инвестициям, по потреблению, по конечному выпуску продукции не зависят от коэффициентов при приростах винеровских процессов в динамиках капиталов отраслей и носят детерминированный характер, а оптимальные траектории по капиталам отраслей – стохастический характер.

Ключевые слова: стохастическая модель, статическая обобщенная модель Леонтьева, инвестиционное опоздания, оптимальное управление, оптимальная траектория, оптимальный процесс.

ANNOTATION

Stochastic modeling is due to the unaccounting of some economic indicators in mathematical models. it is also a consequence of the fact that economic indicators are random variables. Therefore, both theoretically and practically, stochastic modeling is relevant, and especially with a delay. The stochastic static generalized Leontief model using Wiener and Poisson processes with investment delay are proposes in the paper. First, a differentiated generalized Leontiev model with an investment delay is formulated. Assumptions for the construction of a deterministic model are formulated. Then, on the basis of Leontiev's differentiated generalized model, the stochastic model is formalize. Restrictions on activity level, gross investment, consumption, labor and total labor are applied. Maximization of the conditionally average integrated profit for some period of time will be taken as a criterion of the goal in conditions of perfect competition. Sufficient optimality conditions for the stochastic optimal control model were applied, according to which the Bellman equation with boundary condition was constructed. The problem of nonlinear programming to determine the optimal controls for gross investment, consumption, level of activity and labor force, and which can be solved by one of the numerical gradient methods. An algorithm for solving a nonlinear programming problem is proposed. According to the found optimal control of gross investment, stochastic optimal trajectories for the capital of industries are determined by one of the numerical methods of the stochastic initial problem. And the average optimal trajectories for the capital of industries are determined by using the properties of the Wiener and Poisson processes, from the average dynamics of capital under average initial conditions. Formulas for calculating confidence intervals for optimal trajectories for the capital of industries at a given confidence level are given. It is established that in the proposed stochastic model the optimal controls for the level of activity, labor force, gross investment, consumption, final output do not depend on the coefficients of the growth of Wiener processes in the capital dynamics of industries and are deterministic. And it is established that optimal trajectories for the capital of industries are stochastic.

Key words: stochastic model, static generalized Leontief model, investment delay, optimal control, optimal trajectory, the optimal process.

Постановка проблеми. Неврахування деяких економічних показників у математичних моделях (та і самі економічні показники є випадковими величинами) приводить до стохастичного моделювання. А тому як у теоретичному, так і у практичному плані актуальним є стохастичне моделювання, та і ще із запізненням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [1–3] та інших проведено стохастичне моделювання макроекономіки зростання при вінерівських і пуассонівських процесах із допомогою стохастичних достатніх умов оптимальності. Причому в роботі [2] приведено економічне обґрунтування використання вінерівських процесів під час стохастичного моделювання.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Пуассонівський закон розподілу є гауссівським (нормальним) законом розподілу при малих імовірностях. Тому під час стохастичного моделювання можна розглядати лінійну комбінацію вінерівських і пуассонівських процесів.

Формулювання цілей статті **(постановка завдання).** Метою роботи є формування стохастичної узагальненої моделі Леонтьєва з використанням вінерівських і пуассонівських процесів за інвестиційного запізнення та провести її дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. Спочатку сформулюємо диференційовану узагальнену модель Леонтьєва при інвестиційному запізненні, а потім на її основі формалізуємо стохастичну модель.

Сформулюємо припущення для побудови детермінованої моделі [4, с. 289–242; 5, с. 88–92].

Припущення 1. Нехай є n виробничих технологій та випускається m видів продукції, причому $\sum_{i=1}^{m} l(i) = n$. Матриця $A = \left(a_{ij}^{(l)}\right)$, $i, j = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, l(i)}$ – узагальнена матриця коефіцієнтів прямих затрат (узагальнена матриця Леонтьєва), $a_{ij}^{(l)}$ – кількість i –го ресурсу для виробництва одиниці продукції виду j в галузі (секторі) j та виготовленої за l виробничою технологією

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textit{галузь } 1 & \textit{галузь } 2 & & \textit{галузь } m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \ldots a_{11}^{(l(1))} & a_{12}^{(1)} \ldots a_{12}^{(l(2))} & \ldots & a_{1m}^{(1)} \ldots a_{1m}^{(l(m))} \\ a_{21}^{(1)} \ldots a_{21}^{(l(1))} & a_{22}^{(1)} \ldots a_{22}^{(l(2))} & \ldots & a_{2m}^{(1)} \ldots a_{2m}^{(l(m))} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{(1)} \ldots a_{m1}^{(l(1))} & a_{m2}^{(1)} \ldots a_{m2}^{(l(2))} & \ldots & a_{mm}^{(1)} \ldots a_{mm}^{(l(m))} \end{pmatrix} \end{array},$$

B – матриця коефіцієнтів випуску

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textit{галузь } 1 & \textit{галузь } 2 & & \textit{галузь } m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 & 0 \ldots 0 & \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 \ldots 1 & \ldots & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \ldots & 1 \ldots 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$X(t-\tau)$ – вектор валового випуску (рівень діяльності) та Y – вектор кінцевого випуску продукції (кінцевий $(t-\tau)$ випуск) у момент часу $t-\tau$ ($t \in [t_0, \mathrm{T}]$, $\tau \geq 0$ – інвестиційне запізнення):

$$X(t-\tau) = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}(t-\tau), \ldots, X_1^{(l(1))}(t-\tau) \\ X_2^{(1)}(t-\tau), \ldots, X_2^{(l(2))}(t-\tau) \\ \ldots \\ X_m^{(1)}(t-\tau), \ldots, X_m^{(l(m))} \end{pmatrix},$$

$Y(t-\tau) = \left(Y_1(t-\tau), \ldots, Y_m(t-\tau)\right)^{\mathrm{T}}$, T – операція транспонування матриць.

Кожна галузь вибирає із числа доступних виробничих технологій одну визначену виробничу технологію. При цьому повинні виконуватися матричні нерівності

$$(B-A)X(t-\tau) \geq Y(t-\tau),$$
$$X(t-\tau) \geq 0, \quad t \in [t_0, \mathrm{T}].$$

Припущення 2. Рівень діяльності обмежений не тільки працею (робочою силою), але в залежності від вибору терміну виробництва також і основними фондами, головними елементами яких є виробничі будинки та станки, а також земля і багато інших важливих ресурсів.

Нехай γ_{ij} – обсяг ресурсу i, потрібного для випуску одиниці продукції кожного процесу для галузі j, $l = \overline{1, l(j)}$, $j = \overline{1, m_1}$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$, а в дійсності маємо в наявності обсяг ресурсу i як γ_i, $i = \overline{m_1 + 1, m}$. Тоді реальний досягнутий обсяг випуску повинен відповідати такій умові (нерівності) в матричній формі

$$\Gamma X(t-\tau) \leq \gamma, \quad t \in [t_0, \mathrm{T}],$$

де

$$\Gamma = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textit{галузь } 1 & \textit{галузь } 2 & & \textit{галузь } m_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{m_1+1,1}^{(1)} \cdots \gamma_{m_1+1,1}^{(l_{(1)})} & \gamma_{m_1+1,2}^{(1)} \cdots \gamma_{m_1+1,2}^{(l_{(2)})} & \cdots & \gamma_{m_1+1,m_1}^{(1)} \cdots \gamma_{m_1+1,m_1}^{(l_{(m_1)})} \\ \gamma_{m_1+2,1} \cdots \gamma_{m_1+2,1}^{(l_{(1)})} & \gamma_{m_1+2,2}^{(1)} \cdots \gamma_{m_1+2,m_1}^{(l_{(2)})} & \cdots & \gamma_{m_1+2,m_1} \cdots \gamma_{m_1+2,m_1}^{(l_{(m_1)})} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m,1}^{(1)} \cdots \gamma_{m,1}^{(l_{(1)})} & \gamma_{m,2}^{(1)} \cdots \gamma_{m,2}^{(l_{(2)})} & \cdots & \gamma_{m,m_1}^{(1)} \cdots \gamma_{m,m_1}^{(l_{(m_1)})} \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\gamma = \left(\gamma_{m_1+1}, \gamma_{m_1+2}, \ldots, \gamma_m\right)^{\mathrm{T}}.$$

Припущення 3. Кінцевий попит на продукцію i –ої галузі Y_i дорівнює сумі валових інвестицій VI_i та невиробничого споживання (споживання)

$$Y_i(t-\tau) = VI_i(t-\tau) + C_i(t-\tau), \quad i = \overline{1, m}.$$

Причому для фондоутворюючих галузей $Y_i = VI_i + C_i$, $i = \overline{1, r}$ $(r \leq m)$, а нефондоутворюючих $Y_i = C_i$, $i = \overline{r + 1, m}$.

Припущення 4. Витрати валових інвестицій кожної галузі VI_i ідуть на збільшення основних фондів інших галузей (розвиток економіки)

$$VI_i = \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij} I_j\ ,\ i = \overline{1,r}$$

причому $\sum^{r} \chi_{ij} = 1$ для $\forall j = \overline{1,m}$ без врахування амортизаційних відрахувань. При $i > r$ $\chi_{ij} = 0$ для $\forall j = \overline{1,m}$, якщо для кожного i " r існує j, що $\chi_{ij} > 0$ тоді i – ту галузь називають фондоутворюючою.

Припущення 5. Рівняння руху капіталу має вигляд

$$\dot{K}_i^{(l)}(t) = I_i(t-\tau) - \mu_i^{(l)} K_i^{(l)}(t),\ l = \overline{1,l_{(i)}},\ i = \overline{1,m},\ t \in [t_0, T].$$

та означає, що валові інвестиції I_i ідуть на приріст капіталу (чисті інвестиції) $\dot{K}_i^{(l)}(t) \equiv dK_i^{(l)}/dt$ та амортизаційні відрахування $\mu_i K_i^{(l)}(t)$, де $\mu_i^{(l)} \in (0;1)$ – норма амортизації, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$.

Припущення 6. Рівень діяльності $X_i^{(l)}$ обмежений макровиробничою функцією $F_{li}\left(K_i^{(l)}, L_i^{(l)}\right)$

$$0 \le X_i^{(l)} \le F_{li}\left(K_i^{(l)}, L_i^{(l)}\right),\ l = \overline{1,l(i)},\ i = \overline{1,m},$$

яка залежить від капіталу $K_i^{(l)}$ та робочої сили $L_i^{(l)}$ та має властивості [6, с.6–7]: двічі неперервно-диференційована на $K_i^{(l)} \ge 0$ та $L_i^{(l)} \ge 0$, монотонно зростаюча $F'_{lK_i^{(l)}} > 0$ та $F'_{lL_i^{(l)}} > 0$, увігнута $F''_{l\left(K_i^{(l)}\right)^2} < 0$ та $F''_{l\left(L_i^{(l)}\right)^2} > 0$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$.

Припущення 7. На робочу силу накладається обмеження

$$0 \le L_i^{(l)}(t-\tau)\ ,\ l = \overline{1,l(i)},\ i = \overline{1,m}\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{l_{(i)}} L_i^{(l)}(t-\tau) \le N(t-\tau)\ ,\ t \in [t_0, T].$$

Припущення 8. На кінцеві стани системи (капітали) накладаються обмеження

$$K_i^{(l)}(T) \ge K_{iT}^{(l)},\ l = \overline{1,l(i)},\ i = \overline{1,m}.$$

Припущення 9. На споживання накладаються обмеження

$$C_i(t-\tau) \ge C_i^{(\min)}\ ,\ i = \overline{1,m}\ ,\ t \in [t_0, T].$$

Перейдемо до формалізації стохастичної моделі.

Стохастична модель

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ – ймовірністний простір із σ – алгеброю $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\} \subset \sigma$, множиною елементарних подій | та мірою P; $\xi_i^{(l)}(t) \equiv \xi_i^{(l)}(t,\omega) \in \mathbb{R}$ (множина дійсних чисел) – $\mathcal{F}_t$ – вимірний стандартний вінерівський процес із нульовим математичним сподіванням $M\xi_i^{(l)}(t) = 0$ та одиничною дисперсією $-M\left[\xi_i^{(l)}(t)\right]^2 = 1$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$, $t \in [t_0, T]$, $\omega \in \Omega$ [7 ,с.7–8]; $\eta_i^{(l)}(t) \equiv \eta_i^{(l)}(t,\omega)$, $\omega \in \Omega$ $\mathcal{F}_t$ – вимірний пуассонівський процес із математичним сподіванням $M\eta_i^{(l)}(t) = x_i^{(l)}(t-t_0)$, $x_i^{(l)} \equiv const$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$, $t \in [t_0, T]$, $\omega \in \Omega$ [7, с.7]. Причому, випадкові процеси $\xi_i^{(l)}(t)$ та $\eta_i^{(l)}(t)$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$ є незалежними.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ знайдений випадковий процес $\left\{K_i^{(l)}(t) \equiv K_i^{(l)}(t,\omega),\ l = \overline{1,l(i)},\ i = \overline{1,m},\ t \in [t_0, T],\ \omega \in \Omega\right\}$ узагальненої моделі Леонтьєва, який

– описується стохастичними диференціальними моделями руху капіталу $K_i^{(l)}$ галузей у формі Imo [7, с. 15–163].

$$\dot{K}_i^{(l)}(t) = I_i(t-\tau) - \mu_i^{(l)} K_i^{(l)}(t) + \alpha_i^{(l)}(t)\dot{\xi}_i^{(l)}(t) + \beta_i^{(l)}\dot{\eta}_i^{(l)}(t),$$

$$l = \overline{1,l(i)},\ i = \overline{1,m},\ t \in [t_0, T]; \tag{1}$$

– задовольняє початкові умови:

$$K_i^{(l)}(t_0) = K_{i0}^{(l)},\ K_{i0}^{(l)} \in \mathcal{F}_{t0}; \tag{2}$$

– задовольняє обмеження на кінцеві стани системи (капітали)

$$K_i^{(l)}(T) \ge K_{iT}^{(l)},\ l = \overline{1,l(i)},\ i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Накладаються обмеження на рівень діяльності $X_i^{(l)}$, валові інвестиції I_i, споживання C_i, робочу силу $L_i^{(l)}$ та сумарну робочу силу

$$0 \le X_i^{(l)}(t) \le F_{li}\left(K_i^{(l)}(t), L_i^{(l)}(t)\right),\ l = \overline{1,l(i)},\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{l=1}^{l(i)} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}^{(l)} X_j^{(l)}(t-\tau) \le \gamma_i(t-\tau),\ i = \overline{m_1+1,m},$$

$$\sum_{l=1}^{l(i)} X_i^{(l)}(t-\tau) - \sum_{l=1}^{l_{(i)}} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(l)} X_j^{(l)}(t-\tau) \ge$$

$$\ge \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij} I_j(t-\tau) + C_i(t-\tau),\ i = \overline{1,r} \\ C_i(t-\tau),\ i = \overline{r+1,m} \end{Bmatrix},\ i = \overline{1,m},$$

$$I_i(t-\tau) \ge 0,\ C_i(t-\tau) \ge C_i^{(\min)},\ L_i^{(l)}(t-\tau) \ge 0,$$

$$l = \overline{1,l(i)},\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{l(i)} L_i^{(l)}(t-\tau) \le N(t-\tau),\ t \in [t_0, T]. \tag{4}$$

За критерій мети в умовах досконалої конкуренції візьмемо максимізацію умовно середнього інтегрального прибутку за відрізок часу $[t_0, T]$

$$M_{t\varphi}\int_t^T \sum_{i=1}^{m} \left[q_i(t) Y_i(\varphi(t)) - I_i(\varphi(t))\right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} M_{t\varphi}\int_t^T \left\{ q_i(t) \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij} I_j(t-\tau) + C_i(t-\tau),\ i = \overline{1,r} \\ C_i(t-\tau),\ i = \overline{r+1,m} \end{Bmatrix} - I_i(\varphi(t)) \right\} dt \to \max_{X,L,I,C,}, \tag{5}$$

де $\varphi = \left(\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(l(1))}, \dots\dots, \varphi_m^{(1)}, \dots, \varphi_m^{(l(m))}\right)^T$,

$M_{t\varphi}$ – умовне математичне сподівання при умові, що $K_i^{(l)}(y-\tau) = \varphi_i^{(l)}(y)$ при $y \in [t_0, T]$, тобто $K_i^{(l)}(t-\tau) \equiv \varphi_i^{(l)}(t)$, $\varphi_i^{(l)}(t)$ – деяка кусково-неперервна функція, $t \in [t_0, T]$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$,

$$X = \left(X_1^{(1)},\dots,X_1^{(l(1))},\dots\dots,X_m^{(1)},\dots,X_m^{(l(m))}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$L = \left(L_1^{(1)},\dots,L_1^{(l(1))},\dots\dots,L_m^{(1)},\dots,L_m^{(l(m))}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$I = \left(I_1,\dots,I_m\right)^{\mathrm{T}},\; C = \left(C_1,\dots,C_m\right)^{\mathrm{T}},$$

$$I_j\left(\varphi(t)\right) \equiv I_j\left(t-\tau\right),\; j = \overline{1,m},$$

Т – операція транспортування матриць, $\alpha_i^{(l)}$, $\beta_i^{(l)}$, $l = \overline{1,l(i)}$, q_i, $i = \overline{1,m}$ та N – кусково-неперервні функції на $\left[t_0, \mathrm{T}\right]$.

Модель (1)–(5) у математичному плані є задачею стохастичного оптимального керування, в якій керуваннями виступає рівень діяльності $X_i^{(l)}$, робоча сила $l = \overline{1,l(i)}$, валові інвестиції I_i та споживання C_i, $i = \overline{1,m}$, а фазовою траєкторією – капітали галузей $\mathrm{K}_i^{(l)}$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$.

Проведемо дослідження моделі (1)–(5) із використанням стохастичних достатніх умов оптимальності [8, с.116–119].

Оптимальні керування. Для моделі (1)–(5) застосуємо достатні умови оптимальності, за якими запишемо рівняння Беллмана з крайовою умовою

$$\inf_{\mathrm{X},L,I,C} R\left(t,\mathrm{K},\mathrm{X},L,I,C,V\right) \equiv \inf_{\mathrm{X},L,I,C}\left\{\partial V/\partial t + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l(i)} \partial V/\partial \mathrm{K}_i^{(l)}\left[-\mu_i^{(l)}\mathrm{K}_i^{(l)}(t) + I_i\left(t-\tau\right)\right] +$$

$$+0.5\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l(i)}\left(\alpha_{i(t)}^{(l)}\right)^2 \partial^2 V\Big/\partial\left(\mathrm{K}_i^{(l)}\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l(i)} x_i^{(l)}\left[V\left(t,\mathrm{K}',\mathrm{K}_i^{(l)}+\beta_i^{(l)}\right) - V\left(t,\mathrm{K}',\mathrm{K}_i^{(l)}\right)\right] - \quad (6)$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\left\{q_i\left\{\begin{matrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j\left(t-\tau\right)+C_i\left(t-\tau\right),\, i=\overline{1,r}\\ C_i\left(t-\tau\right),\, i=\overline{r+1,m}\end{matrix}\right\} - I_i\left(t-\tau\right)\right\}\Bigg\} = 0$$

$$t \in \left[t_0,\mathrm{T}\right],\; V\left(\mathrm{T},\mathrm{K}_{\mathrm{T}}\right) = 0,$$

де $\mathrm{K}' = \left(\mathrm{K}_1^{(1)},\dots,\mathrm{K}_1^{l(1)},\dots\dots,\mathrm{K}_{i-1}^{(1)},\dots,\mathrm{K}_{i-1}^{(l(i-1))},\mathrm{K}_{i+1}^{(1)},\dots,\mathrm{K}_{i+1}^{(l(i+1))},\dots\dots,\mathrm{K}_m^{(1)},\dots,\mathrm{K}_m^{(l(m))}\right)^{\mathrm{T}}$, невідома функція $V\left(t,\mathrm{K}\right)$ – неперервно диференційована один раз по t і двічі по K на декартовому добутку $\left[t_0,\mathrm{T}\right]\times\left\{\mathrm{K}\geq 0\right\}$ та яку будемо шукати у вигляді

$$V\left(t,\mathrm{K}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l(i)} b_i^{(l)}\left[\mathrm{K}_i^{(l)}(t) - \mathrm{K}_{i\ \mathrm{T}}^{(l)}\right],\; t\in\left[t_0,\mathrm{T}\right]. \quad (7)$$

Тут $b_i^{(l)}$ – сталі, які підлягають визначенню (вибору).

Підставимо (7) у рівняння Беллмана (6). Сформуємо задачу нелінійного програмування для визначення керувань. Із рівняння Беллмана (6) маємо критерій мети

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{l(i)} b_i^{(l)} I_i\left(t-\tau\right)\left\{q_i(t)\left\{\begin{matrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j\left(t-\tau\right)+C_i\left(t-\tau\right),\, i=\overline{1,r}\\ C_i\left(t-\tau\right),\, i=\overline{r+1,m}\end{matrix}\right\} - I_i\left(t-\tau\right)\right\}\right\} \to \min_{C,\mathrm{I}} \quad (8)$$

та обмеження

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{l(i)} b_i^{(l)}\left[-\mu_i^{(l)}\mathrm{K}_i^{(l)}(t) + \mathrm{I}_i\left(t-\tau\right)\right] + \right.$$

$$+\sum_{l=1}^{l(i)} x_i^{(l)} b_i^{(l)}\beta_i^{(l)}(t) - \left\{q_i(t)\left\{\begin{matrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}\mathrm{I}_i\left(t-\tau\right)+C_i\left(t-\tau\right), i=\overline{1,r}\\ C_i\left(t-\tau\right), i=\overline{r+1,m}\end{matrix}\right\} - \quad (9)$$

$$\left.\left.-\mathrm{I}_i\left(t-\tau\right)\right\}\right\} = 0,\; t\in\left[t_0,\mathrm{T}\right].$$

Одержали задачу нелінійного програмування (3), (4), (8), (9) по визначенню оптимальних керувань за валовими інвестиціями $\mathrm{I}_i^{(\text{ОП})}$, за споживанням $C_i^{(\text{ОП})}$, за рівнем діяльності $\mathrm{X}_{i\ \text{ОП}}^{(l)}$ та за робочою силою $L_{i\ \text{ОП}}^{(l)}$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$, яку можна розв'язати одним із чисельних градієнтних методів [9].

Алгоритм розв'язування задачі нелінійного програмування (3), (4), (8), (9) такий.

1. Розв'язується задача нелінійного програмування (3), (4), (8), (9) при $t = \mathrm{T}$. Вибором сталих $b_i^{(l)}$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$ потрібно домогтися виконання існування розв'язку цієї задачі. У випадку неіснування розв'язку це означає, що кінцеві стани системи $\mathrm{K}_{iT}^{(l)}$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$ є недосяжними. Необхідно послабити умови на вхідну інформацію задачі (1)–(5). Вихід із алгоритму.

За існування для деяких сталих $\tilde{b}_i^{(l)}$, $l = \overline{1,l(i)}$, $i = \overline{1,m}$ розв'язку задачі (3), (4), (8), (9) перехід на блок 2.

2. Одержимо оптимальні керування при $t = \mathrm{T}$: $\mathrm{X}_{\text{ОП}}\left(\mathrm{T}\right)$, $L_{\text{ОП}}\left(\mathrm{T}\right)$, $\mathrm{I}_{\text{ОП}}\left(\mathrm{T}\right)$, $C_{\text{ОП}}\left(\mathrm{T}\right)$.

Розіб'ємо часовий відрізок $\left[t_0,\mathrm{T}\right]$ на λ частин із кроком $\Delta t = \left(\mathrm{T}-t_0\right)/\lambda$.

3. Провести розрахунок оптимальних керувань $\mathrm{X}_{\text{ОП}}\left(t_0+\rho\Delta t-\tau\right)$, $L_{\text{ОП}}\left(t_0+\rho\Delta t-\tau\right)$, $\mathrm{I}_{\text{ОП}}\left(t_0+\rho\Delta t-\tau\right)$, $C_{\text{ОП}}\left(t_0+\rho\Delta t-\tau\right)$, $\rho = \overline{1,\lambda-1}$ із розв'язування задачі нелінійного програмування (4), (8), (9).

Таким чином, отримали оптимальні керування за рівнем діяльності $\mathrm{X}_{\text{ОП}}\left(t_0+\rho\Delta t-\tau\right)$, за робочою силою $L_{\text{ОП}}\left(t_0+\rho\Delta t-\tau\right)$, за валовими інвестиціями $\mathrm{I}_{\text{ОП}}\left(t_0+\rho\Delta t-\tau\right)$, за споживанням $C_{\text{ОП}}\left(t_0+\rho\Delta t-\tau\right)$, $\rho = \overline{1,\lambda}$.

Причому оптимальні керування не залежать від коефіцієнтів при приростах вінерівських процесів у динаміках капіталів і носять детермінований характер.

За знайденими оптимальним керуванням за валовими інвестиціями $\mathrm{I}_{\text{ОП}}\left(t-\tau\right)$ стохастичні оптимальні траєкторії за капіталами галузей $\mathrm{K}_{\text{ОП}}(t)$ визначаються одним із чисельних методів [10, с. 278–296; 11] із стохастичної початкової задачі (1)–(2) при $\mathrm{I}=\mathrm{I}_{\text{ОП}}(t-\tau)$.

А середні оптимальні траєкторії $\mathrm{K}_{\text{ОП}}^{(c)}(t)$ визначаються із використанням властивостей вінерівського та пуасонівсткого процесів $\mathrm{M}\dot{\xi}(t)=\left(\mathrm{M}\xi(t)\right)^{\cdot}=0$, $\mathrm{M}\dot{\eta}(t)=\left(\mathrm{M}\eta(t)\right)^{\cdot}=x$ з середньої динаміки капіталів (1) при середніх початкових умовах (2) та мають вигляд

$$\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,c)}(t)=\mathrm{M}\mathrm{K}_{i0}^{(l)}e^{-\mu_i^{(c)}(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}e^{-\mu_i^{(l)}(t-y)}\left[\mathrm{I}_i^{(\text{ОП})}(y-\tau)+\beta_i^{(l)}(y)x_i^{(l)}\right]dy,$$

$$l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},$$

$$x=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_1^{(l(1))},\ldots\ldots,x_m^{(1)},\ldots,x_m^{(l(m))}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\xi(t)=\left(\xi_1^{(1)}(t),\ldots,\xi_1^{(l(1))}(t),\ldots\ldots,\xi_m^{(1)}(t),\ldots,\xi_m^{(l(m))}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\eta(t)=\left(\eta_1^{(1)}(t),\ldots,\eta_1^{(l(1))}(t),\ldots\ldots,\eta_m^{(1)}(t),\ldots,\eta_m^{(l(m))}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{K}_{\text{ОП}}^{(c)}=\left(\mathrm{K}_{1\text{ОП}}^{(1,c)},\ldots,\mathrm{K}_{1\text{ОП}}^{(l(1),c)},\ldots,\mathrm{K}_{m\text{ОП}}^{(1,c)},\ldots,\mathrm{K}_{m\text{ОП}}^{(l(m),c)}\right)^{T},$$

$$\mathrm{K}_{\text{ОП}}=\left(\mathrm{K}_{1\text{ОП}}^{(1)},\ldots,\mathrm{K}_{1\text{ОП}}^{(l(1),c)},\ldots,\mathrm{K}_{m\text{ОП}}^{(1,c)},\ldots,\mathrm{K}_{m\text{ОП}}^{(l(m),c)}\right)^{T}.$$

Тоді оптимальне керування за кінцевим випуском продукції $Y_{\text{ОП}}=\left(Y_1^{(\text{ОП})},\ldots,Y_m^{(\text{ОП})}\right)^{T}$ обчислюється за формулою

$$Y_i^{(\text{ОП})}(t-\tau)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}\mathrm{I}_i^{(\text{ОП})}(t-\tau)+C_i^{(\text{ОП})}(t-\tau),\ i=\overline{1,r}\\ C_i^{(\text{ОП})}(t-\tau),\ i=\overline{r+1,m}\end{cases},$$

$$t\in[t_0,\mathrm{T}],\ i=\overline{1,m}.$$

Таким чином, визначили оптимальний процес $\{\mathrm{K}_{\text{ОП}}(t),\ \mathrm{X}_{\text{ОП}}(t-\tau),\ L_{\text{ОП}}(t-\tau),\ \mathrm{I}_{\text{ОП}}(t-\tau),\ C_{\text{ОП}}(t-\tau),\ t\in[t_0,\mathrm{T}]\}$. Причому оптимальні керування є кусково-неперевними функціями, а оптимальні траєкторії – кусково-диференційованими функціями на $[t_0,\mathrm{T}]$.

Під час стохастичного моделювання необхідно знати довірчі межі за заданою ймовірністю (довірчим рівнем) середніх значень та дисперсій нормальних генеральних сукупностей оптимальних траєкторій за капіталами галузей.

Нехай проведено обчислювальний експеримент по визначенню оптимальних траєкторій за капіталами галузей і одержано Q ансамблів $K_{ij}^{(l)}(t)$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,Q}$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$.

Обчислимо вибіркові статистики [12, с. 213] оптимальних траєкторій за капіталами галузей:

– вибіркові середні

$$\bar{\mathrm{K}}_{i\text{ОП}}^{(l)}(t)=Q^{-1}\sum_{j=1}^{Q}K_{ij\text{ОП}}^{(l)}(t),\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\ l=\overline{1,l(i)};$$

– вибіркові дисперсії

$$S_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}^{2}(t)=(Q-1)^{-1}\sum_{j=1}^{Q}\left(K_{ij\text{ОП}}^{(l)}(t)-\bar{\mathrm{K}}_{i\text{ОП}}^{(l)}(t)\right)^{2},\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$

$$l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m}.$$

Зауважимо, що вибіркові середні оптимальних траєкторій за капіталами $\bar{\mathrm{K}}_i^{(l)}$ дорівнюють середнім оптимальним траєкторіям $K_{ij\text{ОП}}^{(l,c)}$, тобто $\bar{\mathrm{K}}_i^{(l)}(t)=K_{ij\text{ОП}}^{(l,c)}(t)$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$. Довірчі проміжки для дисперсій нормальних сукупностей оптимальних траєкторій за капіталами галузей та за заданою ймовірністю $\Theta\in(0;1)$ набувають вигляду

$$\left(\frac{(Q-1)S_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}^{2}(t)}{\chi_{1-\Theta/2}^{2}(Q-1)};\frac{(Q-1)S_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}^{2}(t)}{\chi_{\Theta/2}^{2}(Q-1)}\right),$$

де $\chi_{\Theta/2}^{2}(Q-1)\left[\chi_{1-\Theta/2}^{2}(Q-1)\right]-\Theta/2\left[1-\Theta/2\right]$ – квантилі розподілу Пірсона із ступенями ($Q-1$) та довірчим рівнем Θ (табличне значення в [12, с. 238–239]).

Тоді довірчими проміжками для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами галузей $\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,p)}$ та за заданим довірчим рівнем Θ є

$$\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,p)}(t)\in\left(\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,c)}(t)-\frac{S_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}(t)\cdot t_{\Theta}}{\sqrt{Q}};\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,c)}(t)+\frac{S_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}(t)\cdot t_{\Theta}}{\sqrt{Q}}\right),$$

$$l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$

де t_{Θ} – Θ – квантиль розподілу Ст'юдента із ($Q-1$) ступенем вільності при довірчому рівні Θ (табличне значення в [12, с. 236–237]).

Таким чином, визначені довірчі межі реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами галузей за заданого довірчого рівня.

Зауваження. Вище описана методика справедлива для стохастичної моделі (1)–(4) із критерієм мети – максимізувавши середню інтегральну дисконтовану функцію корисності $U(C)$ від споживання C на відрізку часу $[t_0,\mathrm{T}]$

$$\mathrm{M}_{t\varphi}\int_{t}^{\mathrm{T}}e^{-\delta(t-t_0)}U\left(C\left(\varphi(t)\right)\right)dt\to\max_{X,L,I,C},$$

де δ – норма дисконту, $\mathrm{M}_{t\varphi}$ – умовне математичне сподівання за умови, що $K(y-\tau)$ дорівнює $\varphi(y)$ при $y\in[t_0,\mathrm{T}]$, тобто $K(t-\tau)\equiv\varphi(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, φ – деякий кусково-неперевний вектор на $[t_0,\mathrm{T}]$, $\varphi=(\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_1^{(l(1))},\ldots,\varphi_m^{(1)},\ldots,\varphi_m^{(l(m))})^{T}$, $U(C\geq0)\geq0$ – функція корисності з властивостями: двічі неперевно-диференційована, монотонно зростаюча $U'_{C_i}(C>0)>0$, увігнута $U''_{C_i^2}(C>0)<0$ та $U(0)=0$.

Висновки.

1. Запропонована стохастична оптимізаційна узагальнена модель Леонтьєва з вінерівськими і пуассонівськими процесами при інвестиційному запізненні та проведено її дослідження.

2. Для запропонованої стохастичної моделі проведено опис оптимального процесу та приведені розрахункові формули обчислення довірчих проміжків для оптимальних траєкторій за капіталами галузей за заданого довірчого рівня.

3. Встановлено, що в запропонованій стохастичній моделі оптимальні керування за рівнем діяльності, за робочою силою, за валовими інвестиціями, за споживанням, за кінцевим випуском продукції не залежать від коефіцієнтів при приростах вінерівських процесів у динаміках капіталів галузей та носять детермінований характер, а оптимальні траєкторії за капіталами галузей – стохастичний характер.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Оптимізаційна стохастична модель із вінерівським і пуассонівським процесами однопродуктової макроекономіки зростання та із запізненням. *Вісник Тернопільського національного економічного університету*. 2013. Вип. 5. С. 20–27.
2. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Стохастическая модель полного цикла оптимальной эколого-экономической динамики. *Проблемы управления и информатики*. 2013. № 2. С. 125–139.
3. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Стохастическое моделирование полного цикла однопродуктовой макроэкономики роста. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. Т. 49. № 2. С. 156–163.
4. Математическая экономика на персональном компьютере / под ред. М. Кубонива. Москва : Финансы и статистика, 1991. 303 с.
5. Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. Моделювання та оптимізація еколого-економічних систем міжгалузевих балансів з інвестиційними запізненнями. Чернівці : "Місто", 2013. 212 с.
6. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора. Чернівці : "Місто", 2012. 208 с.
7. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів : навчальний посібник. Київ : Либідь, 1990. 168 с.
8. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. Москва : Наука, 1992. 336 с.
9. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Москва : Высшая школа, 1986. 319 с.
10. Ясинський В.К., Ясинська Л.І., Юрченко І.В. Методи стохастичного моделювання систем. Чернівці : Вид-во Прут, 2002. 416 с.
11. Мильштейн Г.Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. *Теория вероятностей и ее применение*, 1975.
12. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс : Учебное пособие. Москва : Дело, 1988. 248 с.

REFERENCES:

1. Boychuk M.V., Semchuk A.R. (2013) Optymizatsiina stokhastychna model iz vinerivskym i puassonivskym protsesamy odnoproduktovoi makroekonomiky zrostannia ta iz zapiznenniam [Optimization stochastic model with Wiener and Poisson processes of single-product macroeconomics of growth and with delay]. *Herald of Ternopil National Economic University*, issue 5, pp. 20–27.
2. Boychuk M.V., Semchuk A.R. (2013) Stokhasticheskaya model' polnogo tsikla optimal'noy ekologo-ekonomicheskoy dinamiki [A stochastic full cycle model of optimal environmental and economic dynamics]. *Problems of Control and Informatics*, no. 2, pp. 125–139.
3. Boychuk M.V., Semchuk A.R. (2013) Stokhasticheskoe modelirovanie polnogo tsikla odnoproduktovoy makroekonomiki rosta [Full-cycle stochastic modeling of single-product growth macroeconomics]. *Cybernetics and systems analysis*, vol. 49, no. 2, pp. 156–163.
4. Kuboniva M. (1991) *Matematicheskaya ekonomika na personal'nom komp'yutere* [Mathematical Economics on a Personal Computer]. Moscow: Finance and Statistics. (in Russian)
5. Boychuk M.V., Shmurigina N.M. (2013) *Modeliuvannia ta optymizatsiia ekoloho-ekonomichnykh system mizhhaluzevykh balansiv z investytsiinymy zapiznenniamy* [Modeling and optimization of ecological and economic systems of intersectoral balances with investment delays]. Chernivtsi: "Misto". (in Ukrainian)
6. Boychuk M.V., Semchuk A.R. (2012) *Modeliuvannia ta optymizatsiia povnoho tsyklu odnoproduktovoi makroekonomiky zrostannia z urakhuvanniam ekolohichnoho faktora* [Modeling and optimization of the full cycle of single-product macroeconomics of growth taking into account the environmental factor]. Chernivtsi: "Misto". (in Ukrainian)
7. Skorokhod A.V. (1990) *Lektsii z teorii vypadkovykh protsesiv* [Lectures of the theory of random processes]. Kyiv: Lybid. (in Ukrainian)
8. Andreeva E.A., Kolmanovskiy V.B., Shaykhet L.E. (1992) *Upravlenie sistemami s posledeystviem* [System management with aftereffect]. Moscow: Nauka. (in Russian)
9. Akulich I.L. (1986) *Matematicheskoe programmirovanie v primerakh i zadachakh* [Mathematical programming in examples and tasks]. Moscow: Vysshaya shkola. (in Russian)
10. Yasyns'kyy V.K., Yasyns'ka L.I., Yurchenko I.V. (2002) *Metody stokhastychnoho modeliuvannia system* [Methods of stochastic modeling of systems]. Chernivtsi: Prut. (in Ukrainian)
11. Milshtein G.N. (1975) Priblizhennoe integrirovanie stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy [Approximate integration of stochastic differential equations]. *Probability Theory and Its Application*, vol. 2, issue 3, pp. 583–588.
12. Magnus Ya.R., Katyshev P.K., Peresetskiy A.A. (1988) *Ekonometrika. Nachal'nyy kurs: Uchebnoe posobie* [Econometrics. Beginner Course: Study Guide]. Moscow: Delo. (in Russian)