UDC 330.43+519.862
DOI: https://doi.org/10.32840/2522-4263/2020-1-56

Kozytskyi Valerii
Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematical Economics and Econometrics
Ivan Franko National University of Lviv

Pabyrivska Nelya
Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics
Lviv Politechnic National University

Pabyrivskyi Victor
Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics
Lviv Politechnic National University

Козицький В.А.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної економіки та економетрії,
Львівського національного університету імені Івана Франка

Пабирівська Н.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики,
Національного університету «Львівська політехніка»

Пабирівський В.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики
Національного університету «Львівська політехніка»

PECULIARITIES OF BIFURCATION IN PRICE DYNAMICS

ОСОБЛИВОСТІ БІФУРКАЦІЇ В ДИНАМІЦІ ЦІН

ANNOTATION

The article investigates the nonlinearities and bifurcation in dynamics of price index and inflation. The developed simulation models are based on nonlinear differential equations that demonstrate different patterns of their solutions. The behavior of inflation exhibits various dynamic properties that substantially depend on initial state of economic environment and the values of parameters that describe economic conditions. The results of modeling revealed the bifurcation points and showed that the dynamic of price in economy could move unpredictable and represent different direction of movement even for small change in initial conditions. Moreover, it has been obtained that several equilibrium points in weak economic system are possible, which demonstrate different convergence properties. The price dynamics showed strong peculiarities of bifurcation depending on vicinity of equilibrium level.

Keywords: bifurcation, nonlinear system, price index, differential equation, dynamics, inflation, labor market.

АННОТАЦІЯ

Інфляція – одна з найгостріших проблем сучасного економічного розвитку майже усіх країн світу зі слабкими економічним середовищем. В Україні, однією з цілей Національного банку є низька та стабільна інфляція, забезпечення цінової та фінансової стійкості, що сприятиме сталому економічному та соціальному розвитку країни. У статті досліджено нелінійності та біфуркацію у динаміці індексів цін та інфляції. Розроблені імітаційні моделі базуються на нелінійних диференціальних рівняннях, які демонструють різну поведінку їхніх розв'язків. На підставі розроблених моделей проаналізовано особливості динаміки цінових індексів та проведено сценарний аналіз. Результати моделювання засвідчили, що інфляційні процеси можуть характеризуватись різними динамічними властивостями, які істотно залежать від початкового стану економічного середовища та значень параметрів, що описують економічні умови. Виявлено точки біфуркації та показано, що динаміка ціни в економіці може бути непередбачуваною і демонструвати різний напрямок руху навіть при невеликій зміні початкових умов. Крім того, отримано, що в слабкій економічній системі існує можливість існування декількох точок рівноваги, які характеризуються різними властивостями конвергенції. Для певних рівноважних точок динаміка цін виявляє збіжність до рівноваги за будь якого початкового стану системи, тоді як для інших спостерігається значна залежність від початкового стану і може відбуватись як збіжність так і відштовхування, що в результаті зумовлює швидкий процес зростання цін та гіперінфляцію. Біфуркація спричинює і посилює процеси підпільної інфляції, яка не дає змоги здійснювати централізований контроль та провадити ефективну монетарну політику. За таких умов блокуються природні механізми ринку грошей, економічна система наштовхується на перешкоди, які важко подолати на підставі інституційних механізмів, спостерігається значна рецесія у багатьох сферах економіки, вплив економічних шоків стає непередбачуваним, відбувається поглиблення кризових явищ, у результаті чого перехідний етап та поступ до економічного піднесення значно уповільнюється.

Ключові слова: біфуркація, нелінійні системи, індекс цін, диференціальне рівняння, динаміка, інфляція, ринок праці.

АННОТАЦИЯ

В статье исследуются нелинейности и бифуркации в динамике индекса цен и инфляции. Разработанные имитационные модели основаны на нелинейных дифференциальных уравнениях, демонстрирующих различные закономерности их решений. Поведение инфляции проявляет различные динамические свойства, которые существенно зависят от исходного состояния экономической среды и значений параметров, которые описывают экономические условия. Результаты моделирования выявили точки бифуркации и показали, что динамика цен в экономике может двигаться непредсказуемо и демонстрировать различное направление движения даже при небольшом изменении начальных условий. Более того, было получено, что в слабой экономической системе существует возможность существования нескольких точек равновесия, которые демонстрируют различные свойства сходимости. Динамика цен показала сильные особенности бифуркации в зависимости от расположения равновесия.

Ключевые слова: бифуркация, нелинейная система, индекс цен, дифференциальное уравнение, динамика, инфляция, рынок труда.

Introduction. Inflation is one of the most acute problems of the current economic development of almost all countries of the world, especially of Ukraine. One of the goals of the National Bank of Ukraine is low and stable inflation. As prices rise, they start to affect the general cost of living for the public and the central bank takes the necessary measures to keep inflation within permissible limits. E. Unguru (2017) emphasized that in mass society there is a possibility of threat for democracy. The scientist showed that the risk of chaos is connected with misappropriation, political manipulation by well-known persons as well as malevolent and evil-minded pool of people who are able to make an influence on the public by means of the media that include classical or digital sources [1]. M. Oliskevych and V. Tokarchuk (2018) used Markov-switching autoregressive model to split the behavior into two separate modes that distinguished types of unemployment rate behavior during the downturn and recovery periods that had been occurred due to economic instability, dramatic internal disruptions of social environment and strong external shocks [2].

Literature review. A. Tănasie, R. Drăcea and G. Lădaru (2017) represented the new examples of applying of chaos theory and showed the importance of irregular attractors for different systems that are generated by bifurcation cascades during realization of some scenario in economic policy [3]. Scientists implied the modern nonlinear econometric tools to describe the dynamic properties of macroeconomic factors and emphasized the asymmetric responses of employment possibilities and other indicators of labor market to smooth the impact of positive and negative economic shocks [4, 5]. G. Sorger (2018) built the neoclassical economic growth model under monotonic and convex technology and found the chaotic solution [6].

The economic dynamics of monetary and labor market indicators undertook chaotic properties over some periods. M. Neugart (1999) investigated evidences of chaos and nonlinear behavior by means of a range of different stochastic processes that included nonlinear, deterministic, chaotic systems with linear and nonlinear filters. Scientist tested the correlation dimensions of residuals and filtered series to reveal chaotic dynamics and obtained the nonlinear deterministic core on German labor market dynamics [7]. M. Oliskevych and I. Lukianenko made stress on the importance to take into account the nonlinearities, modern features of strong structural changes and shock influences on the monetary policy results and labor market [8; 9].

Methods. Consider the following continuous nonlinear equation:

$$p\prime(t) = f(p(t)) = b\,p - p^2 = p\,(b - p). \qquad (1)$$

The equation determines two fixed points: $p^*_1=0$ and $p^*_2= b$.

Obviously, two fixed points become the same when b = 0. Let define N_A as a value that denotes the number of equilibrium points of the system that depends on parameter α. If, for any interval $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ N_A is not a constant, α_0 is called bifurcation point, and the system is said to undergo bifurcation when α passes through α_0.

Summarizing in the vicinity of $b = 0$, we obtain

$$N_A = \{ 2, \text{ for } b > 0 \text{ or } b < 0 \;;\; 1, \text{ for } b = 0 \}. \qquad (2)$$

Therefore, $b = 0$ is a bifurcation point. Figure 1 represents this case for different values of b. It should be noted that b can take both negative and positive values. Hence, $-1<b<1$.

Using the properties of stability, we get

$$f\prime(p^*) = b - 2p^* \qquad (3)$$

and

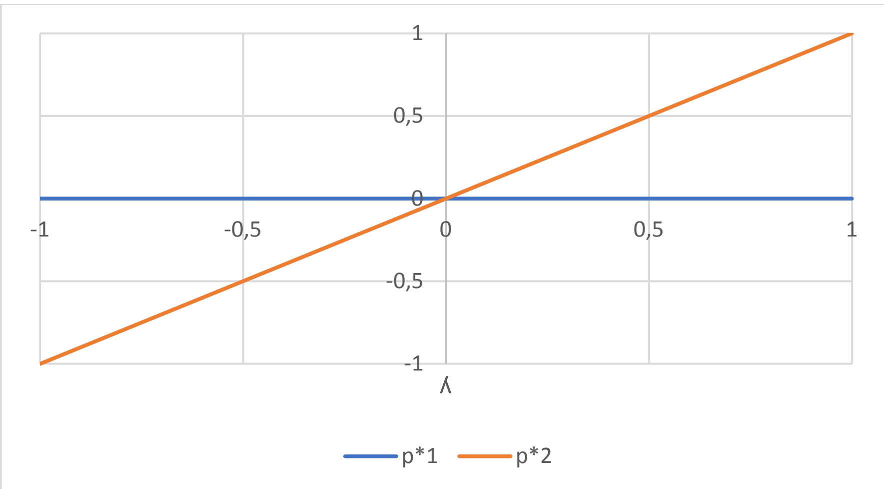

Figure 1. Transcritical bifurcation

$fr'(0)$ = { $b > 0$, hence unstable; $b < 0$, hence stable }. (4)

For the second fixed point

$fr'(b)$ = { $-b < 0$, hence stable for b > 0; $-b > 0$, hence unstable for b < 0}.

The point $p^*_1 = 0$ is represented by the horizontal axis in Figure 1 whereas the point $p^*_2 =$ b is represented by the 45є-line. The two lines intersect at the origin and exchanged of stability. In result, we obtain transcritical bifurcation. A characteristic feature of this bifurcation point is that the fixed points of the system lie on two curves that intersect, and neither of them bends back on themselves (unlike the saddle-node bifurcation).

Results. Using the system dynamics model, we get that if b not equal 0 then there are two fixed points. If $b = 0$ we get a bifurcation point. Figure 2 represent the dynamic of price $b = 0.5$. We can notice that the point $p = b$ is stable, and the point $p = 0$ is unstable.

For b = –0,5 is inversely. The point $p = b$ is unstable, and the point $p = 0$ is stable. Figure 3 proves it.

Figure 4 shows the dynamics of price index for b = 0 when we obtain a bifurcation point.

Next, consider the continuous nonlinear dynamical equation for inflation:

$\pi\prime(t) = g(\pi(t)) = \delta\,\pi(t) - \pi^3(t) = \pi(t)\,(\delta - \pi^2)$. (5)

The system exhibit three fixed equilibrium points

$$\pi^*_1 = 0,\ \pi^*_2 = +\sqrt{\delta}\,,\ \pi^*_3 = -\sqrt{\delta}\,. \qquad (6)$$

Thus, the second and third fixed points are determined only for positive values of δ. Summarizing in the vicinity of $\delta = 0$, we have

$$N_A = \{\ 1,\text{ for } \delta \le 0\ ;\ 3,\text{ for } \delta > 0\ \}. \qquad (7)$$

Then $\delta = 0$ is a bifurcation value. Since,

$$fr'(p^*, \delta) = \delta - 3p^{*2} \qquad (8)$$

then for every fixed point

$fr'(0)$ = { $\delta < 0$, hence stable; $\delta > 0$, hence unstable }.

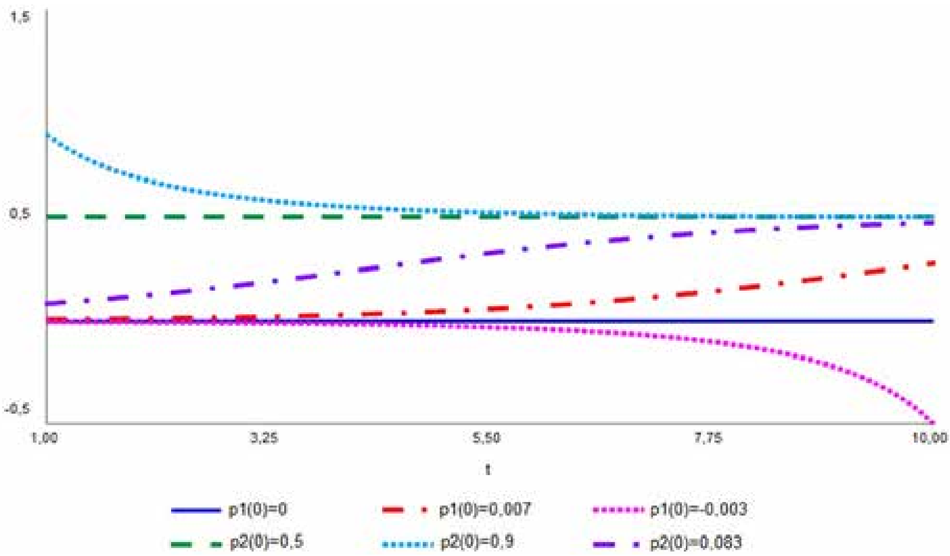

Figure 2. Transcritical bifurcation for the price level in case b = 0.5 price adjustment

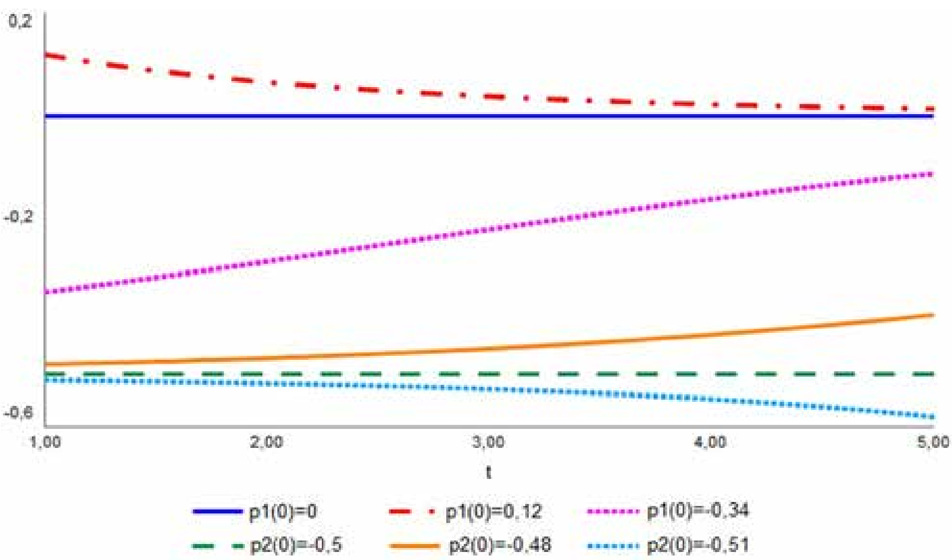

Figure 3. Transcritical bifurcation for the price level in case b =–0.5 price adjustment

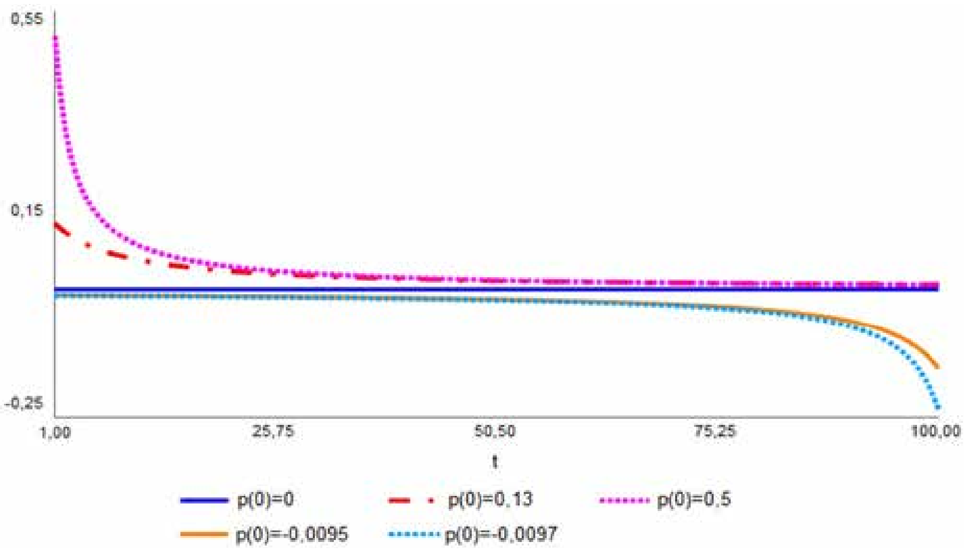

Figure 4. Transcritical bifurcation for the price level in case b = 0 price adjustment

$fr'(+\sqrt{\delta}\,) = -2\delta < 0,\ \delta > 0$ hence stable ,
$fr'(-\sqrt{\delta}\,) = -2\delta < 0,\ \delta > 0$ hence stable .

A characteristic feature of this bifurcation is that it is similar to the U-shaped curve, which is open to the right and the other along the horizontal axis, intersects the vertex U. It forms a pitchfork, as is shown in Figure 5, and therefore the price system represents pitchfork bifurcation.

Next, we consider the nonlinear system of differential equations that describes the behavior of money supply and inflation. Inflation is a socio-economic phenomenon, generated by the disproportion of production in various spheres of market economy.

The system dynamic model includes two main variables, m and i, each of that is a function dependent on time and includes parameter μ. The two equations are

$$m\prime(t) = i(t), \tag{9}$$

$$i\prime(t) = \mu\ (1 - m^2(t))\ i(t) - m(t). \tag{10}$$

To construct the series $m(t)$ and $i(t)$ we use the Euler's approximation and take a look at the behavior of the system when parameter μ is changed. To get the system's fixed points we set $m\prime(t) = 0$ and $i\prime(t) = 0$. Then,

$$i = 0$$

$$\mu\ (1 - m^2)\ i - m = 0.$$

From the first equation, we immediately determine that i^* is zero and we use this in the second equation. Then we receive that m^* is zero. Thus $P = (0; 0)$ is the equilibrium point of the system. This is the only equilibrium point of the system and it does not depend on the value of μ. Figures 6 and 7 represent the dynamics of money supply growth rate and inflation in the long run and demonstrate the convergence properties.

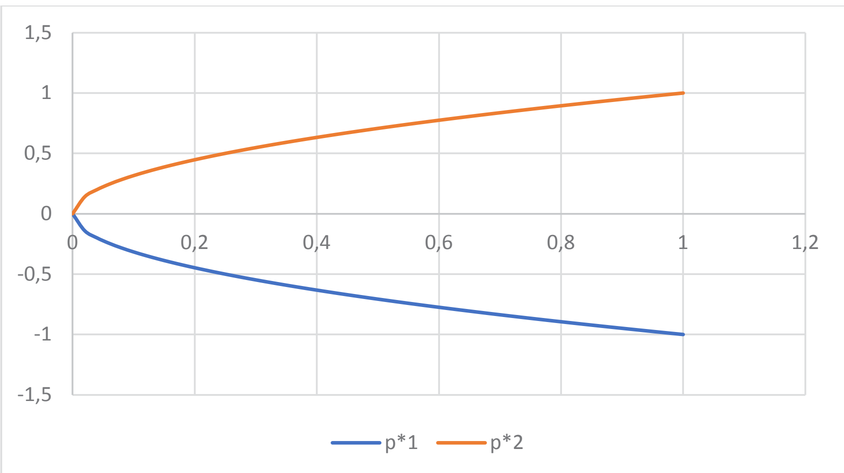

Figure 5. Pitchfork bifurcation

Conclusions. In a weak economic system, there are several points of equilibrium that are characterized by different convergence properties. For some equilibrium points, price dynamics exhibit convergence to equilibrium at any initial state of the system whereas for others a significant dependence on the initial state is observed. Therefore, both convergence and repelling can be observed that is resulting in a rapid process of price growth and hyperinflation. Bifurcation causes and exacerbates the processes of underground inflation that prevent centralized control and effective monetary policy. Under these conditions, natural mechanisms of the money market are blocked, the economic system encounters obstacles that are difficult to overcome on the basis of institutional mechanisms. In result, the system reveals a significant recession in many spheres of the economy and the impact of economic shocks becomes unpredictable.

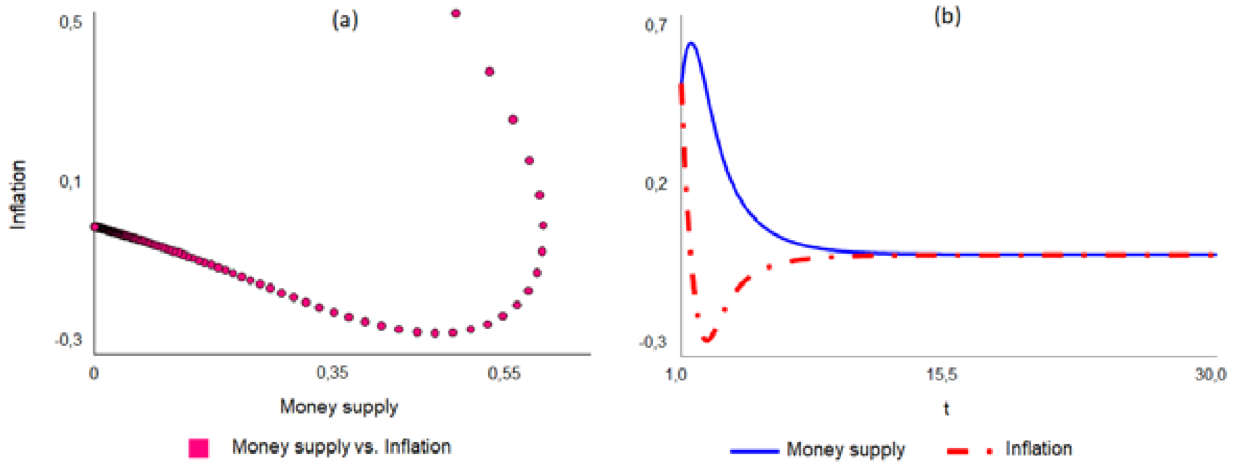

Figure 6. Dynamics of money supply growth rate and inflation for $\mu = -2.5$

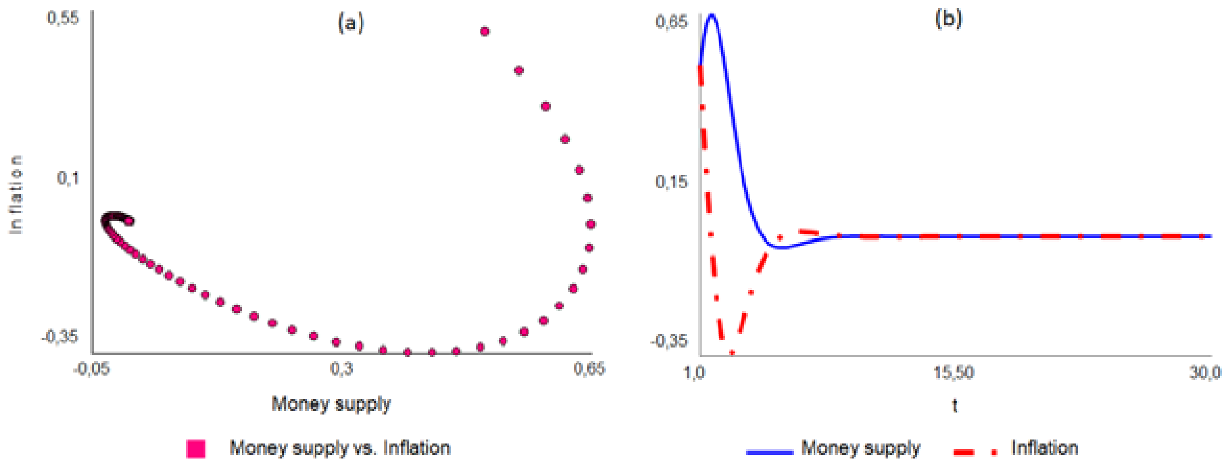

Figure 7. Dynamics of money supply growth rate and inflation for $\mu = -1.5$

REFERENCES:

1. Unguru, E. (2017). From democracy and chaos. *Logos Universality Mentality Education Novelty – Section: Political Sciences and European Studies*, vol. 4(2), pp. 34–36.
2. Oliskevych, M. and Tokarchuk, V. (2018). Dynamic Modelling of Nonlinearities in the Behaviour of Labour Market Indicators in Ukraine and Poland. *Economic Annals – XXI*, vol. 169, Issue 1-2, pp. 35–39.
3. Tanasie, A., Dracea, R., Ladaru, G. (2017). A Chaos Theory Perspective on International Migration. *Sustainability*, vol. 9(12), pp. 1–10.
4. Oliskevych, M. and Lukianenko, I. (2019). Labor Force Participation in Eastern European Countries: Nonlinear Modeling. *Journal of Economic Studies*, vol. 46, No. 6, pp. 1258–1279.
5. Oliskevych, M. (2015). Processes Dynamics Asymmetry at Labour Market: Nonlinear econometric Analysis. *Actual Problems in Economics*, No. 2(164), pp. 427–436.
6. Sorger, G. (2018). Cycles and chaos in the one-sector growth model with elastic labor supply, *Economic Theory*, vol. 65(1), pp. 55–77.
7. Neugart, M. (1999). Is there Chaos on the German Labor Market? *Journal of Economics and Statistics*, Vol. 218(5-6), pp. 658–673.
8. Oliskevych, M. and Lukianenko, I. (2017). Structural Change and Labor Market Integration: Evidence from Ukraine. *International Journal of Economics and Financial Issues*, vol. 7(3), pp. 501–509.
9. Lukyanenko, I. and Oliskevych, M. (2014). Labour Market in Ukraine: an Empirical Dynamic Analysis Using Error Correction Model. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Economics*, vol. 6(159), pp. 52–58.