УДК 369.04:519.863
DOI: https://doi.org/10.32840/2522-4263/2019-4-48

Юрченко М.Є.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри інформаційних систем в економіці
Чернігівського національного технологічного університету

Iurchenko Maryna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Chernihiv National University of Technology

СТОХАСТИЧНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ ЗАДАЧІ

STOCHASTIC ALGORITHM OF SOLVING THE INVERSE ECONOMIC PROBLEM

АНОТАЦІЯ

Багато задач, пов'язаних із математичним моделюванням процесів в економіці, механіці, теорії коливань, математичній фізиці, зводяться до розв'язання обернених спектральних задач, у яких потрібно відновити лінійний оператор за тими чи іншими спектральними характеристиками.Задачі ідентифікації математичних моделей, що при цьому виникають, потребують результатів у чисельному вигляді та в реальному масштабі часу. Для розв'язання цих задач потрібні ефективні наближені методи. З появою потужних ЕОМ сфера застосування обернених і некоректних задач охопила практично всі наукові дисципліни, у яких використовуються математичні методи. Головні напрями застосування – геофізика, астрономія, візуалізація даних, медична і промислова томографія, дефектоскопія і дистанційне зондування, економіка. Необхідність створення нових наближених методів зумовлена ще й тим, що обернені задачі на власні значення розв'язуються аналітично у виняткових випадках. Розглянуто алгоритм, який дає змогу знайти розв'язок аналітичної задачі OLAP – On-line Analytical Processing. Запропонований метод передбачає визначення аргументів функції на основі статистичних даних за минулі періоди. Даний алгоритм дає змогу правильно сформувати управлінське рішення. Перевагою алгоритму є простота його комп'ютерної реалізації, а також відсутня необхідність розв'язання системи рівнянь, застосування процедури згортки і багаторазового розв'язку задачі за допомогою зворотних обчислень.

Ключові слова: обернені задачі, математичні моделі, спектральні задачі, наближені методи, некоректні задачі.

АННОТАЦИЯ

Множество задач, связанных с математическим моделированием процессов в экономике, механике, теории колебаний, математической физике, сводятся к решению обратных спектральных задач, в которых необходимо восстановить линейный оператор по тем или иным спектральным характеристикам. Задачи идентификации возникающих при этом математических моделей решаются преимущественно в численном виде и обоснование эффективности применения того или иного приближенного метода является сегодня актуальной задачей. С появлением мощных ЭВМ область применения обратных и некорректных задач охватила все научные дисциплины, в которых используются математические модели. Главными направлениями применения обратных задач на сегодняшний день являются такие области, как геофизика, астрономия, визуализация данных, медицинская и промышленная томография, дефектоскопия и дистанционное зондирование, экономика. Необходимость дальнейшего усовершенствования методов решения обратных задач обусловлена тем фактом, что их решение в аналитическом виде возможно только лишь для некоторого узкого класса задач. Представленный алгоритм позволяет найти аналитическое решение задачи OLAP – On-line Analytical Processing и дает возможность определить аргументы функций на основе статистических данных за предыдущие периоды. Преимуществом данного алгоритма является простота его компьютерной реализации. При использовании предложенного алгоритма нет необходимости использовать процедуру свертки и решать задачу при помощи метода обратных вычислений.

Ключевые слова: обратные задачи, математические модели, спектральные задачи, приближенные методы, некорректные задачи.

ANNOTATION

Many problems related to the mathematical modeling of processes in economics, mechanics, oscillation theory, and mathematical physics are reduced to the solution of inverse spectral problems, in which one needs to restore a linear operator for certain spectral characteristics. The problems of identifying mathematical models that arise in this case require results in numerical form and in real time. To solve these problems, we need effective closed-form methods. With the advent of powerful computers, the scope of application of inverse and incorrect tasks encompassed almost all scientific disciplines in which mathematical methods are used. The main areas of application are geophysics, astronomy, data visualization, medical and industrial tomography, defectoscopy and remote sensing, economics. The necessity of creating new numerical methods is also due to the fact that the inverse problems related to eigenvalues can be solved analytically only in exceptional cases. Since the inverse of the function is difficult and often impossible to compute, there is a need to develop methods that would solve some of the inverse problems without it. The purpose of the study is to construct an algorithm for the solution of the inverse economic problem of the heterogeneous resources distribution, which is one of the main optimization problems that are solved when developing complex systems. The algorithm allows finding the solution of the analytical OLAP problem – Online Analytical Processing. The proposed method involves the definition of the function arguments based on statistical data for past periods. This algorithm allows formulating a managerial solution correctly. The advantage of this algorithm is the simplicity of its computer implementation as well as absence of need to solve the system of equations, application of the convolution procedure or the multiple solution of the problem with the help of inverse computations. This method allows to obtain a solution taking into account coefficients of relative importance and constraints on the values of arguments.

Key words: inverse problems, mathematical models, spectral problems, approximate methods, incorrect tasks.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Під час вивчення фізичних об'єктів або явищ експериментальними методами типова ситуація, коли кількісні характеристики об'єкта, що цікавлять дослідника, або не є доступними для безпосереднього спостереження, або проведення самого експерименту неможливе взагалі, тому що він або заборонений (наприклад, під час вивчення здоров'я людини), або занадто небезпечний (наприклад, під час вивчення екологічних явищ). Нарешті, експеримент може бути пов'язаний із дуже великими фінансовими витратами. Проте практично завжди можна отримати деяку непряму інформацію про досліджуваний об'єкт, за якою можливо зробити припущення про його властивості. Ця інформація визначається природою об'єкта, що вивчається, й експериментальним комплексом, що використовується. У таких ситуаціях для діагностики об'єктів (наприклад, їх внутрішньої структури) необхідні математична обробка та інтерпретація результатів спостережень. Йдеться про задачі, у яких треба визначити причини, якщо відомі отримані в результаті спостереження наслідки. Такі завдання належать до класу обернених задач математичної фізики і зараз відіграють велику роль у природничих науках та їх застосуванні.

У цілому під *оберненими задачами* розуміються задачі, розв'язання яких проводиться у рамках деякої математичної моделі досліджуваного об'єкта або процесу і полягає у визначенні параметрів цієї моделі за наявними результатами спостережень та іншої експериментальної інформації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор. Перші публікації з обернених і некоректних задач з'явилися в першій половині XX ст. Вони були пов'язані з дослідженнями фізиків (обернені задачі квантової теорії розсіювання, електродинаміки, акустики), геофізиків (обернені задачі електророзвідки, сейсміки, теорії потенціалу), астрономії та інших сфер природознавства.

Із появою потужних ЕОМ сфера застосування обернених і некоректних задач охопила практично всі наукові дисципліни, у яких використовуються математичні методи. Головні напрями застосування – геофізика, астрономія, візуалізація даних, медична і промислова томографія, дефектоскопія та дистанційне зондування, економіка.

Як відомо, у прямих задачах математичної фізики дослідники прагнуть знайти (у явній формі або наближено) функції, які описують різні фізичні явища. При цьому властивості середовища (коефіцієнти рівнянь), а також початковий стан процесу (у нестаціонарному випадку) або його властивості на межі (у разі обмеженої сфери і/або у стаціонарному випадку) вважаються відомими. Проте саме властивості середовища на практиці часто є невідомими. Це означає, що необхідно формулювати і розв'язувати обернені задачі, у яких вимагається визначити або коефіцієнти рівнянь, або невідомі початкові чи граничні умови, або місце розташування, межі й інші властивості сфери, в якій відбувається досліджуваний процес.

Ці задачі здебільшого некоректні (тобто в них порушена хоча б одна з трьох властивостей коректності – умова існування, єдиності і стійкості розв'язку по відношенню до малих варіацій даних задачі). Часто в обернених задачах вимагається знайти місце розташування, форму і структуру включень, дефектів, джерел (тепла, коливань, напруги, забруднення) тощо.

Ж. Адамаром [1], а потім І. Гельфандом та Б. Левітаном [2] визначено умови, яким повинна задовольняти коректно поставлена задача, для рівняння з частинними похідними: існування й єдиність розв'язку і неперервна залежність розв'язку від початкових даних. Серед прибічників дослідження задач математичної фізики виключно в коректній постановці слід зазначити таких учених, як А. Пуанкаре, В.А. Стєклов, І.Г. Петрівський, І. Пригожин та ін. Ж. Адамар не визнавав адекватності некоректно поставлених задач безлічі реальних процесів, але водночас не сумнівався, що останні існують. Фактично він висунув тезу про неадекватність засобів математичного моделювання, що використовувалися.

Донедавна вважалося, що некоректні задачі позбавлені фізичного сенсу і їх розв'язання є недоцільним. Проте є безліч прикладних задач фізики, механіки, астрономії, що адекватно описуються математично, але водночас є некоректними, що зробило актуальною проблему розроблення ефективних методів їх розв'язання. У зв'язку із цим слід згадати виступ Г.Е. Шилова на засіданні Московського математичного товариства, присвяченому пам'яті Ж. Адамара. Автор підкреслив, що наш час зробив корективи в установки Адамара, оскільки з'ясувалося, що некоректні за Адамаром задачі можуть бути змістовними (як, наприклад, наведена у виступі задача про відновлення потенціалу поля за даними розсіювання). Водночас Г.Е. Шилов відзначив, що поняття коректності за Адамаром стало засадою для подальшого розуміння наведеної проблеми.

В.Н. Тихонов у роботах [3; 4] визначив, як потрібно розуміти розв'язок некоректної задачі і запропонував [4] один із можливих способів регуляризації некоректної задачі, що полягає у зведенні початкової задачі до знаходження розв'язків деякого операторного рівняння і проблеми пошуку мінімуму деякого функціонала. У зв'язку із цим з'явилося поняття коректності за Тихоновим, уведене вперше М.М. Лаврентьєвим [5], що обіграє порівняно простий варіант пошуку розв'язку у звуженому класі функцій, для якого відповідна постановка задачі коректна. Нині алгоритми спряжених градієнтів, запропоновані В.М. Фрідманом, уважаються одними з ефективних під час розв'язання великих погано зумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зводиться велика частина задач математичного моделювання.

Слід також зазначити, що велике практичне значення має дослідження практичних задач, які відносяться до третього класу, що є нібито проміжним між коректними і некоректними задачами. Особливістю вказаних задач є зміна коректності за еквівалентних перетворень математичної моделі. Вивчення третього класу задач математичної фізики і властивостей перетворень, еквівалентних у розширеному сенсі, розпочате в 1990–1997 рр. у Київському національному університеті [6; 7].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття. Розглянуто алгоритм, який дає змогу знайти розв'язок аналітичної задачі OLAP – On-line Analytical Processing. Запропонований метод передбачає визначення аргументів функції на основі статистичних даних за минулі періоди. Даний алгоритм дає змогу правильно сформувати управлінське рішення.

Формулювання цілей статті **(постановка завдання).** Оскільки обернену функцію отримати важко, а часто й неможливо, існує потреба в розробленні методів, які дали б змогу розв'язувати деякі обернені задачі без неї. Метою дослідження є побудова алгоритму розв'язку оберненої економічної задачі розподілу неоднорідних ресурсів, що є однією з основних оптимізаційних задач, які розв'язуються під час проектування складних систем.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. Розроблена А.Н. Тихоновим теорія сингулярних збурень стала ефективно використовуватися під час дослідження різних задач для рівнянь із частинними похідними. Під оберненими задачами він розумів вивчення властивостей об'єктів, недоступних або незручних для безпосереднього вивчення. Згідно з його теорією, піддаються вивченню ті характеристики об'єкта, які можна виміряти, а потім на їх основі відшукати закономірності в розвитку самих об'єктів. А.Н. Тихоновим також уведено таке визначення, що має теоретичну значущість: нехай деяка сукупність елементів $\{x\}$ відображається функцією $f(x)$ на іншу сукупність елементів $\{x^*\}$: $x^* = f(x)$. Таке відображення називається взаємно однозначним у точці x_0, якщо

$$x^* = f(x_0) \neq f(x)$$

для будь-якого елемента x, відмінного від x^*.

Це визначення дало змогу авторові сформулювати й довести теорему, що є основою теорії існування обернених задач: *нехай деякий метричний простір R неперервно відображається на інший метричний простір R^*, тобто*

$$x^* = f(x), \left[x \in R, x^* \in R^*\right].$$

Якщо це відображення взаємно однозначне в точці x_0 та простір R компактний, то відображення $x = f^{-1}(x^*)$ також неперервне в точці x^*.

На відміну від змісту класу обернених задач, досліджуваних у роботах вищезгаданих авторів, знаходження розв'язків обернених економічних задач характеризується передусім метою управління, вираженою за допомогою значення якого-небудь економічного або іншого показника, і наявністю прямої функції. Ця функція відображує залежність наслідку від причини, результатів від витрат, рівня досягнення мети від витрачених для цього засобів тощо. Обернені задачі характеризуються примхливістю і трудомісткістю. Примхливість полягає у непередбачуваності поведінки функції, вигляд якої, як правило, або невідомий, або відомий приблизно.

Звідси, завжди існує проблема з визначенням діапазонів значень початкових економічних даних, за яких задача, по-перше, має сенс, а по-друге, має розв'язок. Оскільки обернену функцію отримати важко, а часто й неможливо, існує потреба в розроблення методів, які дали б змогу розв'язувати деякі обернені задачі без неї. Відзначимо, що розв'язки для такого класу задач можуть бути частковими, тобто точковими, такими, що базуються не на сфері розв'язків, а на деякій її точці.

Із класичної теореми Коші-Ковалевской випливає, що розв'язок широкого кола обернених і некоректних задач існує й єдиний, але тільки в деякому класі аналітичних функцій. Д. Ортега [8] довів, що вимогу аналітичності можна істотно послабити. Л. Тестарди, розвиваючи метод шкал банахових просторів Д. Ортега [9], показав, що для широкого кола обернених задач можна позбавитися від умови аналітичності по двох змінних – просторовій і часовій.

Ці дослідження відкрили шлях до вивчення багатовимірних обернених задач геофізики, базовою моделлю в якій є горизонтально-шарувате середовище. Однією з головних стала ідея про те, що під час дослідження некоректних задач необхідно звузити клас можливих розв'язків. При цьому найважливішу роль відіграє вибір множини, у якій шукається наближений розв'язок (множина коректності). Найчастіше цю множину вибирають компактною, що дає можливість обґрунтувати збіжність регуляризуючих алгоритмів, допомагає вибрати параметр регуляризації, оцінити відхилення наближеного розв'язку від точного розв'язку некоректної задачі. Результати математичних досліджень були застосовані для розв'язання низки конкретних обернених задач геофізики, радіолокації, астрономії, медичної томографії. У роботі Б.Е. Одинцова [10] запропоновано теорію обернених обчислень, де під оберненою задачею розуміється визначення приростів аргументів прямої функції (змінних функції) на підставі цільового припису людини і додаткової інформації, що містить відомості про початкові значення аргументів і коефіцієнта відносної важливості аргументів. Таким чином, заміна цільової функції відбувається більшою мірою за рахунок аргументів, які мають більше значення коефіцієнта відносної важливості.

Нехай задана функція $y = f(x, z)$, причому, відповідно до мети управління, необхідний її приріст на величину Δy. Оскільки у функції два аргументи, приріст її можливий за рахунок приросту або першого аргументу, або другого, або ж за рахунок приросту обох, або за рахунок збільшення першого і зменшення другого, або за рахунок зменшення першого і збільшення другого. Перший варіант можна представити так: $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$, де $\Delta y_1, \Delta y_2$ – прирости функції, що отримані за рахунок приростів першого і другого аргументів. Інші варіанти отримуються шляхом зміни знаків біля приростів.

Згідно з представленою вище теорією, для того щоб дізнатися, якими мають бути прирости аргументів, задамо такі співвідношення:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta y} = \alpha,\ \frac{\Delta y_2}{\Delta y} = \beta,$$

що дасть змогу записати:

$$\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta y}}{\frac{\Delta y_2}{\Delta y}} = \frac{\frac{y(x \pm \Delta x, z) - y(x, z)}{\Delta y}}{\frac{y(x, z \pm \Delta z) - y(x, z)}{\Delta y}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Якщо, наприклад, $\alpha = 0,75$, а $\beta = 0,25$, то наведене співвідношення треба розуміти так: 0,75 від усього приросту функції буде отримано за рахунок приросту аргумента x, а 0,25 – за рахунок приросту аргумента z.

Коефіцієнти α та β – це коефіцієнти відносної важливості аргументів або цілей, які ці аргументи представляють. Вони задаються спочатку і дають змогу відшукати прирости $\pm\Delta x$ та $\pm\Delta y$. Це нагадує задачу факторного аналізу, що має обернену постановку. У зв'язку з тим, що більший інтерес представляє співвідношення між приростами аргументів, запишемо:

$$\frac{\frac{\Delta x}{\Delta y}}{\frac{\Delta z}{\Delta y}} = \frac{\Delta x}{\Delta z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Далі користуватимемося саме цим співвідношенням. Для того щоб задача обернених обчислень була довизначеною, її слід доповнити виразом:

$$y \pm \Delta y = f(x \pm \Delta x; z \pm \Delta z).$$

Беручи до уваги, що $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \alpha\Delta y + \beta\Delta y$, записуємо таку умову: $\alpha + \beta = 1$.

З урахуванням цього обернену задачу для функції двох аргументів $f(x,z)$ в загальному випадку можливо записати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f\left(x \pm \Delta x(\alpha),\ z \pm \Delta z(\beta)\right), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

де y, x, z – вихідні значення функції й аргументів; Δy – необхідний приріст функції, що задається; α, β – коефіцієнти відносної важливості x та z відповідно У цій постановці обов'язковим обмеженням виступає умова $\alpha + \beta = 1$. Розв'язуючи систему відносно невідомих Δx та Δy, отримуємо необхідні прирости аргументів.

Відзначимо, що якщо функція містить більше двох аргументів, можливі два шляхи розв'язання поставленої задачі:

– створити систему рівнянь, число яких відповідає числу аргументів;

– звернутися до процедури згортки/розгортки, яка дає змогу звести багатоаргументну функцію до двох аргументів. Розглянемо перший шлях. Нехай задана функція з трьома аргументами:

$$y = f(x, z, p)$$

Приріст функції можливий за рахунок приросту (додатного або від'ємного) усіх трьох аргументів, тобто:

$$\pm\Delta y = \pm\Delta y_1 \pm \Delta y_2 \pm \Delta y_3,$$

де $\pm\Delta y$ – загальний приріст функції; $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$ – прирости функції, отримані за рахунок приростів першого, другого та третього аргументів відповідно.

Як і раніше, можна задавати співвідношення приростів аргументів, що забезпечують необхідний приріст відповідної частини приросту функції, наприклад:

$$\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta y}}{\frac{\Delta y_2 + \Delta y_3}{\Delta y}} = \frac{\frac{y(x \pm \Delta x, z, p) - y(x, z, p)}{\Delta y}}{\frac{y(x, z \pm \Delta z, p \pm p) - y(x, z, p)}{\Delta y}} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$$

де α, β, γ – коефіцієнти відносної важливості цілі, що відображаються аргументами x, z, p. Позначаємо:

$$\frac{\Delta x}{\Delta z + \Delta p} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma},$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x + \Delta p} = \frac{\beta}{\alpha + \gamma},$$

У такому разі задачу обернених обчислень для функцій із трьома аргументами можна розв'язати за допомогою такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f\left(x \pm \Delta x(\alpha), z \pm \Delta z(\beta), p \pm \Delta p(\gamma)\right), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z + \Delta p} = \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}, \\ \dfrac{\Delta z}{\Delta x + \Delta p} = \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma} \end{cases}$$

Як і раніше, як обмеження використовуються нерівності вигляду:

$$\Delta x \le \Delta\overline{x},\ \Delta z \le \Delta\overline{z},\ \Delta p \le \Delta\overline{p}$$

Тут $\Delta x(\alpha)$, $\Delta z(\beta)$, $\Delta p(\gamma)$ – вирази, які вказують на функціональну залежність відповідних приростів від коефіцієнтів відносної важливості α, β, γ.

На основі цього методу був також розроблений модифікований метод зворотних обчислень [10], за допомогою якого можна обчислити нові значення аргументів функції на основі початкових значень аргументів і результату, а також коефіцієнтів відносної важливості. Під час знаходження розв'язку використовується лінійне рівняння зв'язку між аргументами, тому цей метод у процесі комп'ютерній реалізації не вимагає виконання перевірки відповідності встановлених коефіцієнтів важливості поставленої мети.

Окрім того, Б.Є. Одинцовим розглянуто задачі, коли на значення аргументів накладені обмеження і, отже, можливе виникнення дефіциту ресурсу. У роботі [10] запропоновано ітераційну процедуру, засновану на послідовному збільшенні результуючої змінної. До повного вичерпання ресурсів або досягнення заданого значення цільової функції повторюються такі кроки: знаходження розв’язку за допомогою обернених обчислень; перевірка відповідності отриманого розв’язку заданим обмеженням і перерахунок приростів у разі виявлення дефіциту в деякому ресурсі.

За числа аргументів більше двох задача ускладнюється і виникає необхідність використання процедури згортки. Використання запропонованих нами стохастичних методів під час розв’язання задач подібного роду дає змогу уникнути складних обчислень і знайти наближений розв’язок з урахуванням коефіцієнтів важливості, обмежень аргументів, у тому числі розглядати ситуації, коли змінні можуть приймати тільки цілі значення або значення із заданого набору.

Оскільки обернена задача може бути представлена у вигляді задачі глобальної оптимізації, у якій потрібно мінімізувати різницю між заданим значенням цільової функції й отриманим розв’язком, розглянемо деякі існуючі методи, що дають змогу мінімізувати цільову функцію.

Алгоритми випадкового пошуку. Поява ідеї використання випадкових величин під час пошуку рішення пов'язують з іменем У.Р. Ешбі. Алгоритми пошуку поділяють на неспрямовані (усі випадкові випробування будують незалежно один від одного) і спрямовані (випробування пов'язані між собою). Найбільш простим методом розв’язання задач глобальної оптимізації є метод неспрямованого випадкового пошуку. Він полягає в отриманні випадкових значень аргументів із заданого інтервалу, розрахунку цільової функції і порівнянні її величини з найкращою з обчислених. Якщо нове розраховане значення результату виявилося менше, то здійснюється запам'ятовування отриманого розв’язку. Таким чином, для функції одного аргументу послідовність кроків буде така:

Крок 1. Генерування на інтервалі $[r,R]$ рівномірно розподіленої випадкової величини x.

Крок 2. Якщо $f(x)<f_{min}$ (f_{min} – мінімальне знайдене значення функції), то відбувається запам'ятовування нової точки як поточного розв’язку $f_{min}=f(x)$, $x_{min}=x$. Кроки повторюються протягом заданого числа реалізацій або до отримання розв’язку з указаною точністю. Такий спосіб знаходження розв’язку є реалізацією методу проб і помилок. Даний алгоритм може бути поєднаний із локальним пошуком, коли з випадково вибраних точок здійснюється локальний спуск у найближчий мінімум. Зі знайдених локальних мінімумів далі вибирається точка з найменшим значенням. Завдяки своїй простоті і гнучкості даний метод набув широкого поширення під час розв’язання різних задач.

Наприклад, у роботі [11] розглядається використання методу неспрямованого випадкового пошуку для розв’язання комбінаторної задачі вибору оптимального портфеля біржових опціонів, що дало змогу отримати цілочисельні значення шуканих величин. До алгоритмів спрямованого пошуку відносять алгоритм парної проби, із поверненням після невдалої спроби, найкращої проби тощо. В алгоритмі парної проби по обидва боки від вихідної точки робляться два пошукових кроки випадкової величини. Після цього здійснюється перехід у нову точку в напрямі найкращого значення функції. В алгоритмі з поверненням після невдалої спроби задається початкова точка x і випадковим чином здійснюється моделювання збільшення dx. Якщо значення функції в новій точці $x+dx$ краще, ніж в точці x, то здійснюється перехід у цю точку. Деякі автори пропонують виключати той напрям, який не призводить до поліпшення значення функції.

Істотним недоліком наведених алгоритмів спрямованого пошуку є те, що вони як розв’язок можуть визначити локальний мінімум, а не глобальний. У зв'язку із цим розробляються різні модифікації. До них, зокрема, можна віднести адаптивні алгоритми. Наприклад, такими алгоритмами є випадковий пошук ARSET (Adaptive Random Search Technique) і динамічний випадковий пошук DRASET (Dynamic Random Search Technique). В адаптивному випадковому пошуку залежно від значення цільової функції простір пошуку звужується (коли відбувається пошук найкращого значення) або розширюється (коли знайдено рішення з прийнятною точністю), таким чином, зменшується ймовірність знаходження локального мінімуму замість глобального через недостатнє дослідження окремих ділянок. В алгоритмі DRASET після знаходження розв’язку додатково здійснюється локальний пошук навколо знайденої точки для отримання більш точного значення.

До недоліків методу випадкового пошуку відносять необхідність виконання великого числа ітерацій для отримання розв’язку із заданою точністю, що вимагає витрат обчислювальних ресурсів. Окрім того, також існує похибка обчислень.

Стохастичні алгоритми розв'язання оберненої задачі. Згідно з даним методом, взаємозв'язок показників може бути представлений у вигляді дерева, де на нульовому рівні розташовано значення результуючої функції, а на нижніх – аргументи. Своєю чергою, кожен лист цього дерева може бути результуючим показником (рис. 1).

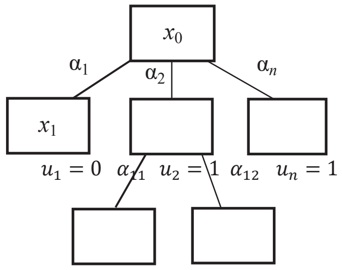

Рис. 1. Представлення задачі у вигляді дерева

Вузли дерева мають такі характеристики:

початкове значення x; коефіцієнт відносної важливості α (сума коефіцієнтів відносної важливості аргументів одного рівня, які відносяться до одного результуючого показника, повинна дорівнювати одиниці); мінімальне *r* і максимальне *R* значення, які може приймати даний показник; індикатор u, що характеризує можливість використання даного елемента, і приймає два значення: 1 (використання можливе) і 0 (використання неможливе).

Коефіцієнт відносної важливості α вказує ступінь зміни результуючого показника за рахунок цього аргументу. Він може відображати перевагу дослідника у визначенні величин, а також розраховуватися на основі даних за попередні періоди і, таким чином, показувати найбільш імовірні значення аргументів для досягнення результату. Значення індикатора u стає рівним нулю в разі, якщо зміна аргументу не може бути виконана через існуюче обмеження або відсутність позитивної зміни цільової функції. Також цей індикатор дорівнює нулю для величин-констант.

У випадку, що розглядається, для розв'язання оберненої задачі були розроблені два алгоритми. Перший являє собою модифікацію випадкового пошуку, другий – ітераційної процедури, заснованої на збільшенні функції. Щоб випадковий пошук можна було використовувати для розв'язання оберненої задачі, необхідно:

врахувати коефіцієнти важливості аргументів;

подати обернену задачу у вигляді задачі глобальної оптимізації, де потрібно мінімізувати різницю між отриманим розв'язком і шуканим y^*.

Для цього використовується інтегральний показник, який відображає ступінь досягнення глобального мінімуму і відповідність приростів аргументів коефіцієнтами важливості. Таким чином, алгоритм може бути представлений у вигляді таких кроків:

Крок 1. Генерування на інтервалах $[r_i, R_i]$ рівномірно розподілених випадкових величин $x_{t,i}$ ($i = 1,\dots,n$, n – кількість аргументів). Розрахунок значення функції $y_t = f(x_t)$.

Крок 2. Знаходження інтегрального показника:

$$c = \frac{|y_t - y^*|}{|y - y^*|} + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{|\Delta x_i|}{\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|} - \alpha_i \right|,$$

де $\Delta x_i = x_{t,i} - x_i$. Перша частина доданка приймає мінімальне значення, яке дорівнює нулю, якщо величина результуючого показника буде близька до заданого y^*, друга частина – за відповідності приростів коефіцієнтам важливості.

Крок 3. Порівняння з найкращим значенням інтегрального показника: якщо $c < c_{min}$, то новий розв'язок запам'ятовується як поточний $y_{min} = f(x_t)$, $x_{\min i} = x_{t,i}$. Критерієм зупинки є виконання заданого числа ітерацій або отримання розв'язку з указаною точністю.

Розглянемо тепер алгоритм, заснований на моделюванні приросту функції. Встановлюється крок збільшення аргументів Δy.

Крок 1. Встановити нове значення результуючого показника $y_t = y_t + \Delta y$.

Крок 2. За допомогою алгоритму моделювання повної групи несумісних подій вибрати вузол із вершин-нащадків, для яких значення індикатора дорівнює 1, відповідно до коефіцієнтів важливості $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Для цього виконується розрахунок нормованих значень імовірностей за формулою:

$$p_i^* = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j},$$

де j – номер вершини, для якої значення індикатора дорівнює 1. Якщо вузол не знайдено, то здійснюється завершення роботи алгоритму.

Крок 3. Визначається значення $x^*_{t,k}$ вибраної на попередньому кроці вершини k за фіксованих значень інших величин для отримання заданого y_t.

Крок 4. Перевірка відповідності обмеження $r_k \le x^*_{t,k} \le R_k$. Якщо умова виконується, то $r_{t,k} = x^*_{t,k}$, і всім вершин, які не є константою, присвоюється індикатор, що дорівнює одиниці, а інакше $f_k = 0$. Перехід до кроку 1.

Крок 5. Перевірка умови: $y^* = y_t$. Якщо умова виконується, відбувається завершення роботи алгоритму, інакше – перехід до кроку 1. Отримані значення x_t будуть розв'язками задачі.

Як приклад розв'язання обернених економічних задач розглянемо обернену задачу розподілу неоднорідних ресурсів, що є однією з основних оптимізаційних задач, які розв'язуються під час проектування складних систем. Поставлену задачу будемо формулювати так: необхідно так вибрати кількість засобів, указати такий варіант їх розподілу по одиницях продукту, що обслуговуються, і запропонувати такі способи їхніх дій, щоб заданий рівень ефективності виконання засобами поставленого завдання досягався за їхніх мінімальних витрат. Отже, необхідно знайти таке мінімальне значення засобів $\{k_i\}$, $i = 1, K^*$ і так розподілити їх по одиницях продукту $\{l_i\}, i = 1, L$, щоб ефект обслуговування кожної з одиниць P_j був не менше деякого заданого значення P_j^*.

Будемо характеризувати план розподілу засобів такою матрицею $\gamma = \{\gamma_{ij}\}$, де:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0, \text{засіб і не виділяється для обслуговування j-одиниці продукта} \\ 1, \text{засіб і виділяється для обслуговування j-одиниці продукта} \end{cases}$$

Таким чином, необхідно знайти значення K^* та γ^*, які є розв'язками задачі:

$$\min\left(K(\gamma) / P_j \geq P_j^*; K^* \leq K; \gamma \in ¥\right) \qquad (1)$$

$$P_j = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \gamma_{ij}P_{ij}\right), \qquad (2)$$

де P_{ij} – ймовірність виконання задачі i-м засобом для j-ї одиниці продукту, Υ – множина можливих планів розподілу засобів. Множина Υ може бути заданою обмеженнями які мають такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^{L}\gamma_{ij} \leq 1,\ \ i = 1, K \qquad (3)$$

кожен засіб може бути призначено не більше ніж на одну одиницю продукту:

$$\sum_{i=1}^{K}\gamma_{ij} \leq V,\ \ j = 1, L \qquad (4)$$

При цьому вважаємо, що за кожною одиницею може бути закріплено не більше V засобів. Як уже було зазначено, до найбільш поширених методів розв'язання обернених задач належать модифіковані методи випадкового пошуку і метод динамічного програмування. Однак застосування зазначених методів для низки завдань не є ефективним. Це пояснюється досить великим обсягом ітераційних обчислень для знаходження розв'язків. Одним зі шляхів подолання зазначених труднощів є використання різницевих методів, сутність яких полягає у послідовному призначенні одиниць ресурсу таким чином, щоб у результаті забезпечити розв'язок задачі, близький до оптимального.

Розглянемо матрицю ефективності розподілу $P = \left\{P_{ij}\right\}, i = 1, K, j = 1, L$

$$P = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \ldots P_{1L} \\ P_{21} & P_{22} \ldots P_{2L} \\ P_{K1} & P_{K2} \ldots P_{KL} \end{vmatrix}$$

Можна скласти деяку матрицю призначень H^*, відповідну до матриці P, яка визначає мінімальну кількість засобів, призначених на кожну одиницю продукту без взаємного врахування використання засобів по інших одиницях, тобто без урахування обмежень. Ця матриця може бути складена так:

$$H^* = \begin{vmatrix} 0 & 11\ldots0 \\ 0 & 10\ldots0 \\ 1 & 00\ldots1 \\ 1 & 01\ldots1 \\ & \end{vmatrix}$$

Представлена вище матриця описує план розподілу коштів, що визначає нижню межу значень критерію якості розв'язку задачі:

$$K_{-} = infK = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{L}\gamma_{ij}^* \qquad (5)$$

Виходячи зі сказаного вище, доцільно складати реальний план так, щоб на кожному кроці під час призначення засобів якомога менше відхилятися від цієї межі. Перепишемо представлене вище співвідношення у вигляді:

$$K_{-} = \sum_{k=1}^{L} n_{k,}^*\ \ n_k^* = \sum_{i=1}^{K}\gamma_{ik}^* \qquad (6)$$

де n_k^* – мінімальна кількість коштів, яку необхідно призначити на k-у одиницю продукту для виконання умови (2) без урахування обмеження (3). Виходячи із цього значення, γ_{ij}^* та, відповідно, $n_{k,}^*$ можуть бути визначені шляхом розв'язання L таких задач:

$$n_k^* \ \ \overrightarrow{\gamma_{ik}} \min \qquad (7)$$

за умови

$$1 - \prod_{i=1}^{K}\left(1 - \gamma_{ik}P_{ik}\right) \geq P_k^*,$$

де P_k^* – заданий рівень ефективності обслуговування k-ої одиниці продукту, або:

$$min\left(n_k^*\left(\gamma_{ik}\right) / P_k\right) \geq P_k^*, k = 1, L$$

Під час розв'язання поставленої задачі використовуємо принцип найменшого відхилення. Суть методу полягає у тому, що для реального призначення треба вибирати елемент $\left(i^*, j^*\right)$, що забезпечує виконання умови:

$$\left(i^*, j^*\right): \min \Delta_{ij,}\ \ \Delta_{ij} = \sum_{h=1}^{K}\left(n_k^{ij} - n_k^*\right),\ \ \Delta_{ij} \geq 0 \qquad (8)$$

де n_k^{ij} – мінімальна кількість засобів, що виділяються на k-у одиницю продукту, з урахуванням призначення засобу i на одиницю продукту j. Кількість засобів, відповідних призначенню певного засобу i^* на певну одиницю продукту j^*, характеризується планом розподілу $H^{i^*j^*}$ і вектором $\left\{n_k^{i^*j^*}\right\}$, які також знаходяться шляхом розв'язання M задач:

$$n_k^{i^*j^*} \ \ \overrightarrow{\gamma_{ik}} \min \qquad (9)$$

за умови

$$P_k = 1 - \prod_{i=1}^{K}\left(1 - \gamma_{ik}P_{ik}\right) \geq P_k^*,\ \gamma_{i^*j} = 0, j \neq j^*$$

або

$$min(n_k^{i^*j^*}\left(\gamma_{ik)} / P_k\right) \geq P_k^*, \gamma_{i^*j} = 0, j \neq j^*$$

Розв'язок задачі в даному разі розбивається на низку одновимірних задач, що підвищує ефективність запропонованого методу під час його реалізації. Наведемо приблизний алгоритм розв'язання.

1. Знаходимо елементи $n_k^{*(0)}$, які задовольняють такій умові:

$$n_k^{*(0)}\ \overrightarrow{\gamma_{ik}} \min,\ \ i = 1, K,\ \ P_k \geq P_k^*$$

2. Знаходимо елементи $n_k^{i^*j^{*(t)}}$, які задовольняють умові:

$$n_k^{i^*j^*(t)}\ \ \overrightarrow{\gamma_{ik}} \min, i^*, i \in K^{(t)},\ P_k \geq P_k^{*(t)}, \gamma_{i^*j^*} = 1, j, j^{(t)} \in L^{(t)}$$

де $K^{(t)}$ – множина засобів, які не використовуються до t-го кроку обчислювательного процесу;

$L^{(t)}$ – множина одиниць продукта, які не обслуговуються до t-го шагу обчислювательного процесу;

$P_k^{*(t)}$ – задана ймовірність обслуговування k-ої одиниці продукта до t-го шагу обчислювательного процесу.

3. Знаходимо елементи матриці $\Delta = \{\Delta_{i,j}\}$ за співвідношенням:

$$\Delta_{i,j} = \sum_{h=1}^{L^{(t)}} \left(n_k^{ij(t)} - n_k^{*(t)} \right), i \in K^{(t)}, j \in L^{(t)}$$

4. Закріплюємо засіб i^* за j^* одиницею продукту згідно з умовою:

$$\Delta_{i^* j^*} = min \Delta_{ij}$$

5. Перераховуємо P_j^*:

$$P_{j^*}^{*(t+1)} = 1 - \frac{1 - P_{j^*}^{*(t)}}{1 - P_{i^* j^*}} = \frac{P_{j^*}^{*(t)} - P_{i^* j^*}}{1 - P_{i^* j^*}}$$

$$P_{j^*}^{*(t+1)} = P_{j^*}^{*(t)}, \ j \neq j^*$$

6. Перераховуємо n_j^*:

$$n_{j^*}^{*(t+1)} = n_{j^*}^{*(t)} - 1;$$

$$n_j^{*(t+1)} = n_j^{*(t)}; \ j \neq j^*$$

7. Перевіряємо умову $P_{j^*}^{*(t+1)} \geq 0$:

$$\begin{cases} \text{"так"} - L^{(t+1)} = L^{(t)} \\ \text{"ні"} - L^{(t+1)} = L^{(t)} - 1; \ n_{j^*=} n_{j^*}^{*(0)} - n_{j^*}^{*(t+1)} \end{cases}$$

8. Перевіряємо умову $L^{(t+1)} = 0$:

$$\begin{cases} \text{"так"} - \text{перейти до пункту 10,} \\ \text{"ні"} - \text{перейти до пункту 9} \end{cases}$$

9. Перевіряємо умову $t \leq K$:

$$\begin{cases} \text{"так"} - \text{перейти до пункту 2,} \\ \text{"ні"} - \text{перейти до пункту 10} \end{cases}$$

10. Кінець.

Слід зазначити, що під час вибору елементів (i^*, j^*) в п. 5 можливі випадки існування декількох пар індексів, які реалізують умову:

$$\Delta_{i^* j^*} = min \Delta_{ij}$$

Це означає, що з'являється неоднозначність у виборі елементів (i^*, j^*). Неоднозначність, що виникла, можна подолати таким способом. Назвемо оптимальним елементом матриці Δ елемент, відповідний індексам, що визначаються з умови (10). Позначимо: $K_{i^* j}$ – число оптимальних елементів, що викреслюються зі стовпця матриці Δ при виборі оптимального елемента (i^*, j^*), K_{ij^*} – число оптимальних, елементів, що викреслюються з рядка матриці Δ під час вибору оптимального елемента (i^*, j^*).

Тоді $K_{i^* j^*} = K_{i^* j} + K_{ij^*}$ – число оптимальних елементів, які викреслюються з матриці Δ під час призначення оптимального елемента (i^*, j^*). Поставивши у відповідність кожному оптимальному елементу величину $K_{i^* j^*}$, будемо проводити призначення цих елементів у порядку зростання $K_{i^* j^*}$ починаючи з оптимальних елементів, відповідних найменшим значенням цього показника. Оптимальні елементи, які опинилися в рядку або стовпці призначеного оптимального елемента, з подальшого розгляду на даному етапі розподільчого процесу виключаються.

Висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Перевагою даного алгоритму порівняно з розглянутими вище є простота його комп'ютерної реалізації, а також відсутня необхідність розв'язання системи рівнянь, застосування процедури згортки і багаторазового розв'язку задачі за допомогою зворотних обчислень. Даний метод дає змогу отримати розв'язок з урахуванням коефіцієнтів відносної важливості і обмежень на величини аргументів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Адамар Ж. Задача коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. Москва : Наука, 1978. 298 с.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. *Известия АН СССР. Серия «Математика».* 1951. № 15. С. 234–237.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1986. 287 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Математические задачи компьютерной томографии. Москва : Наука, 1987. 160 с.
5. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. Москва : Наука, 1991. 331 с.
6. Iurchenko M., Yurchenko-Tytarenko A. Assessment of the insurance company with Laplace transform. *Scientific bulletin of Polissia.* 2016. Vol. 6. № 2. P. 26–30.
7. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев : Вища школа, 1989. 183 с.
8. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. Москва : Мир,1991. 365 с.
9. Testardi L.R., Norton S.J. Acoustic dimensional resonance tomographi: some examples in one-dimensional system. *J. Appl. Phys*. 2006.Vol. 96. № 1. P. 55–58.
10. Одинцов Б.Е., Обратные вычисления в формировании экономических решений. Москва : Финансы и статистика, 2004. 256 с.
11. Slavutsky L.A. WKB-approximation for inverse problem of radiowaves refraction. URSI-S on EM theory proc. 11-15 May 2012, Australia. P. 404.

REFERENCES:

1. Adamar, Z. (1978), Zadacha koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa [The Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolic type], Nauka, Moscow, Russia
2. Gelfand, I. and Levitan, B.(1951) "Ob opredelenii differentsial'nogo uravneniya po yego spektral'noy funktsii" [On the determination of a differential equation from its spectral function], Izv. AN SSSR, Ser. matem., Vol.15, pp 234-237.
3. Tikhonov, A. and Arsenin, V. (1986), Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving incorrect problems], Nauka, Moscow, Russia.
4. Tikhonov, A. and Arsenin, V. (1987),Matematicheskiye zadachi komp'yuternoy tomografii [Mathematical tasks of computed tomography], Nauka, Moscow, Russia.
5. Lavrentyev, M. and Savelyev, L. (1991), Lineynyye operatory i nekorrektnyye zadachi [Linear operators and ill-posed problems], Nauka, Moscow, Russia

6. Iurchenko, M. and Yurchenko-Tytarenko, A. (2016), “Assessment of the insurance company with Laplace transform”, Scientific bulletin of Polissia, Vol 6, no 2, pp.26-30.
7. Zhariy, O.and Ulitko, A. (1989), Vvedeniye v mekhaniku nestatsionarnykh kolebaniy i voln [Introduction to the mechanics of non-stationary oscillations and waves],Vyshcha shkola, Kiyev, Ukraine.
8. Ortega, D. (1991), Vvedeniye v parallelnyye i vektornyye metody resheniya lineynykh system [Introduction to parallel and vector methods for solving linear systems],Mir, Moscow, Russia.
9. Testardi, L. and Norton, S. (2006), “Acoustic dimensional resonance tomographi: some examples in one-dimensional system”, J. Appl. Phys.,Vol. 96, no1, pp. 55-58.
10. Odintsov, B.(2004), Obratnyye vychisleniya v formirovanii ekonomicheskikh resheniy [Inverse calculations in the formation of economic decisions], Finansy i statistika, Moscow, Russia.
11. Slavutsky, L. (2012), “WKB-approximation for inverse problem of radiowaves refraction”, URSI-S on EM theory proc, Australia.